



Fac. CC. Económicas y Empresariales  
Universidad de La Laguna



Fac. CC. Económicas y Empresariales  
Univ. de Las Palmas de Gran Canaria

## ***Splines* como función de la proporción del periodo estacional**

**Gloria Martín Rodríguez (\*)**

**DOCUMENTO DE TRABAJO 2008-02**

(\*) Universidad de La Laguna. Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría ([gmartinr@ull.es](mailto:gmartinr@ull.es); Tfno: 922317034)

## *SPLINES* COMO FUNCIÓN DE LA PROPORCIÓN DEL PERIODO ESTACIONAL

### Resumen

En este trabajo, se propone una metodología apropiada para el tratamiento de patrones estacionales heterogéneos en el sentido de que el periodo en el que se completa la fluctuación estacional no es siempre de la misma longitud y la magnitud de la variación estacional correspondiente a determinada estación no es fija. Con objeto de ganar en parsimonia y flexibilidad, la variación estacional en una estación se especifica como función de la proporción de la longitud del periodo estacional correspondiente a la citada estación y se aproxima mediante funciones *splines* cambiantes. Esta metodología se aplica a una serie semanal.

*Palabras claves:* patrones estacionales heterogéneos, proporción de la longitud del periodo estacional, *splines*, modelos estructurales.

### Abstract

In this paper a seasonal model is proposed to deal with heterogeneous seasonal patterns, in which neither the length of the seasonal period nor the magnitude of the seasonal effects remain the same over time. In these settings, there is a need for parsimony and flexibility. To this end, the seasonal effect at a season is defined as a function of the proportion of the length of the seasonal period elapsed up to this season, and the seasonal pattern is modelled by means of evolving splines. The methodology is illustrated for a weekly series.

*Key words:* heterogeneous seasonal patterns, proportion of the seasonal period, splines, structural time series models.

*JEL classification:* C22.

## **1. Introducción**

En el análisis de series temporales económicas se ha superado ya la época en la que la evolución de las tendencias y el estudio de los ciclos acaparaban la atención del analista, mientras que las variaciones estacionales, definidas como fluctuaciones regulares y periódicas en torno a la dinámica de largo plazo, se consideraban una perturbación ruidosa poco relevante que debía ser eliminada para facilitar la observación de otros comportamientos más significativos. Afortunadamente, desde hace ya décadas se ha advertido que estas fluctuaciones son responsables de buena parte de los movimientos experimentados por las magnitudes objeto de estudio y que el análisis de esta dinámica de más corto plazo puede aportar en muchas ocasiones la información relevante para la toma de decisiones. La reflexión más detallada sobre este componente de las series ha llevado incluso a admitir que las variaciones estacionales no son tan regulares como se había supuesto (Hylleberg, 1992:4) y se han desarrollado modelos capaces de recoger aquellas variaciones estacionales que responden a una función determinística de la estación a la que pertenece la observación en cuestión, así como aquellas otras en las que la magnitud de la variación estacional en una determinada estación posee un carácter estocástico.

Ahora bien, en los últimos años las características de la información a la que un analista económico puede tener acceso se han modificado sustancialmente. Tal vez como consecuencia del interés anterior y, por supuesto, también del desarrollo tecnológico, el hecho es que actualmente se dispone de información sobre muchas magnitudes registrada con regularidad en periodos cada vez más cortos de tiempo (Engle, 2000). La posibilidad de examinar estas series de alta frecuencia exige aún más dirigir la atención hacia las variaciones estacionales. Y, sobre todo, las especiales características de los patrones estacionales presentes en este tipo de series sugieren la necesidad de reflexionar sobre el propio concepto de estacionalidad.

Las series de alta frecuencia permiten un examen de los comportamientos periódicos a más corto plazo y, en este sentido, es preciso admitir que la variación estacional observada puede ser el resultado de la superposición de fluctuaciones periódicas diversas. A modo de ejemplo, en la serie horaria de ventas de un centro comercial pueden detectarse comportamientos periódicos determinados como función de la hora del día, de la semana, del mes o del año. Y cuando estos comportamientos se analizan con este nivel de detalle resulta cada vez más difícil asumir que la

desviación con respecto a la variación de largo plazo en una misma estación es siempre de igual magnitud.

Pero, además de esta falta de regularidad, los comportamientos estacionales registrados en estas series se caracterizan también por su heterogeneidad, en tanto que el periodo en el que se completa alguna de las fluctuaciones periódicas que definen el comportamiento estacional no es siempre de la misma longitud. Esta circunstancia puede advertirse en series registradas con un relativo grado de desagregación temporal. Por ejemplo, los precios semanales de un producto agrario sólo se registrarán en las semanas en las que existe producción comercializada, y el periodo de comercialización puede variar de un año a otro en función de circunstancias meteorológicas o de estrategias empresariales. Y esta fuente de heterogeneidad, que puede ser más o menos acentuada en función de la naturaleza de la serie, estará siempre presente en series diarias u horarias de cierta longitud, que contendrán meses con distinto número de días, o incluso años bisiestos y no bisiestos.

Como señalan Pedregal y Young (2006), este tipo de datos es difícil de tratar con los métodos existentes. La complejidad del patrón estacional en series de alta frecuencia invita a la búsqueda de modelos, por una parte, parsimoniosos, puesto que el número de estaciones que definen el periodo en el que alguna variación estacional se completa es generalmente elevado, y, por otra, flexibles, de manera que puedan adaptarse a su heterogeneidad. Desde este punto de vista, las funciones *splines*<sup>1</sup>, en las que la variación estacional se define como una función más o menos flexible de la estación a la que pertenece la observación, pueden constituir un enfoque apropiado. En cualquier caso, la especificación exige modelar tanto el componente de largo plazo como la variación estacional. Harvey y Koopman (1993) y Harvey *et al.* (1997) modelan el componente de largo plazo a través de especificaciones propias de los modelos estructurales de series temporales y, para recoger el componente estacional, sugieren utilizar funciones *splines* cúbicas periódicas, especificadas de modo que dichas funciones se ajusten exactamente a alguna aproximación previa del componente estacional en determinadas estaciones. Ferreira *et al.* (2000) asumen también que el componente estacional es una función alisada del tiempo y proponen estimar simultáneamente tendencia y estacionalidad a través de respectivas funciones *splines* a las que imponen diferente grado de alisado e introduciendo además un factor que penaliza la

---

<sup>1</sup> Véase, entre otros, Poirier (1976) y Eubank (1988).

27/10/2008

desviación entre la *spline* estacional y la estimación correspondiente a una formulación convencional de variables cualitativas.

Se trata en ambos casos de especificaciones que buscan la flexibilidad necesaria para captar patrones estacionales cambiantes. Precisamente en esta dirección han aparecido en la literatura especializada reciente algunos trabajos en los que la variación estacional se especifica a través de parámetros cuyo cambio se ajusta a determinadas formas funcionales. En este sentido, cabe destacar la propuesta de Orbe *et al.* (2005), que imponen restricciones particulares a cada uno de los parámetros que intervienen en la especificación. Y también es interesante la modulación de ciclos introducida por Pedregal y Young (2006), que, especialmente en el caso de superposición de diferentes comportamientos periódicos, se traduce en la imposición del supuesto de que los parámetros que intervienen en la formulación trigonométrica asociada a una variación estacional de determinado periodo cambian de acuerdo con un ciclo estocástico asociado a otra frecuencia, posiblemente propia de otra variación estacional, de modo que se consigue una importante ganancia en parsimonia. En cualquier caso, la flexibilidad se introduce a través de restricciones que guían la conducta estocástica de los parámetros que intervienen en la especificación. Pero estas restricciones no se derivan de lo observado, sino que, en todo caso, son resultado de un proceso de optimización.

Frente a aproximaciones que otorgan flexibilidad a la variabilidad del proceso para hacer que los datos puedan ser considerados observaciones del proceso estocástico modelado, el recurso a funciones *splines* permite especificar un patrón estacional con parámetros que cambien en función del cambio observado en la forma del patrón estacional. Esta aproximación modela explícitamente los cambios en la media del proceso estocástico que responden a variaciones estacionales cambiantes y de este modo facilita la descripción y la predicción de este componente. En concreto, la forma funcional polinómica a trozos y las restricciones de continuidad y periodicidad que se imponen a las *splines* convencionales dotan a esta especificación de cierta regularidad, mientras que la posibilidad de definir *splines* diferentes para distintos subperiodos de la serie observada aporta la flexibilidad suficiente para captar las heterogeneidades que puedan estar presentes. Martín y Cáceres (2005) utilizan estas potencialidades para modelar el patrón estacional de una serie semanal en la que el periodo en el que se completa la variación estacional contiene diferente número de semanas en dos submuestras. Por el contrario, Koopman y Ooms (2005) recurren a modelos periódicos para

modelar el conjunto de series definidas por las observaciones correspondientes a cada uno de los días del mes de una serie diaria e introducen valores perdidos como mecanismo para hacer constante la longitud del periodo estacional mensual.

Sin embargo, en series en las que no siempre se observan datos referidos a cada uno de los estadios del periodo en el que se completa la fluctuación estacional o en las que la longitud de dicho periodo es relativamente inestable, las especificaciones anteriores pueden ser insuficientes. Además de un modelo capaz de recoger la variación estacional, se necesita una redefinición de ésta. Piénsese, por ejemplo, en los precios semanales de un producto agrario en el mercado internacional. Es muy posible que el periodo de comercialización comience unos años antes que en otros y que la semana final del periodo varíe con los años. Pero es razonable admitir quizás que la mejor calidad del producto se obtiene hacia mediados de la campaña y en ese momento se alcanzan los mejores precios. Entonces, la variación estacional depende no tanto de la semana en cuestión, sino de la parte del periodo estacional que ha transcurrido. Definir la magnitud de la variación estacional como función de la proporción de la longitud del periodo estacional o como función de la estación a la que pertenece la observación en cuestión significa interpretar el carácter periódico de la fluctuación en escalas de medida diferentes; y, por supuesto, son aproximaciones equivalentes cuando la longitud de dicho periodo es constante. Pero si el periodo en el que se completa la variación estacional no es siempre de la misma longitud, la redefinición de la variación estacional en una estación determinada como función de la proporción que indica la parte del periodo estacional que ha transcurrido en el instante del tiempo correspondiente a la estación en cuestión, no significa complicaciones analíticas en la especificación de funciones *splines* y, sin embargo, proporciona una ganancia relevante en términos de flexibilidad y parsimonia. En la sección siguiente se propone una formulación de este tipo. Y en la sección tercera, el modelo propuesto se aplica a una serie semanal de exportaciones de tomate en la que el número de semanas de la campaña exportadora varía de una campaña a otra. Finalmente, se exponen las conclusiones del trabajo realizado.

## 2. Especificación de la *spline* como función de la proporción del periodo estacional

Supóngase que la serie observada contiene tendencia y variaciones estacionales y puede modelarse como

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

27/10/2008

donde  $\mu_t$  y  $\gamma_t$  son los componentes tendencial y estacional, respectivamente, y  $\varepsilon_t$  es el componente irregular. Si el patrón estacional no se completa siempre en el mismo número de estaciones, conviene dividir la serie en  $m$  subperiodos de tiempo en los cuales la longitud del periodo estacional es  $s_c$ ,  $c = 1, \dots, m$ . Supóngase que la variación estacional en dos instantes del tiempo no cambia si la proporción de la longitud del periodo estacional correspondiente a dichos instantes del tiempo es la misma. Es decir, se asume que  $\gamma_t = \gamma_w$  si el instante del tiempo  $t$  corresponde a la estación  $j_c$  del sub-periodo  $c$  tal que  $w = \frac{j_c}{s_c}$ . Nótese que  $w$  es la fracción que indica la parte del periodo estacional que ha transcurrido hasta la estación  $j_c$  y, dado que  $j_c = 1, \dots, s_c$ , se tiene que  $0 < w \leq 1$ . Entonces, si la magnitud de la variación estacional cambia suavemente entre estaciones consecutivas, una *spline* cúbica periódica puede ser una representación apropiada de estas fluctuaciones. Es decir,

$$\gamma_w = g(w) + \xi_w, \quad (2)$$

donde  $\xi_w$  es un término residual y  $g(w)$  es una *spline* cúbica periódica tal que

$$g(w) = g_i(w) = g_{i,0} + g_{i,1}w + g_{i,2}w^2 + g_{i,3}w^3, \quad w_{i-1} \leq w \leq w_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3)$$

donde  $w_0 = 0$  y  $w_k = 1$  y a la que se imponen las siguientes condiciones de continuidad. La continuidad de la función, de su derivada primera y de su derivada segunda en los puntos de ruptura se obtiene mediante las restricciones

$$g_{i,0} + g_{i,1}w_i + g_{i,2}w_i^2 + g_{i,3}w_i^3 = g_{i+1,0} + g_{i+1,1}w_i + g_{i+1,2}w_i^2 + g_{i+1,3}w_i^3, \quad (4a)$$

$$g_{i,1} + 2g_{i,2}w_i + 3g_{i,3}w_i^2 = g_{i+1,1} + 2g_{i+1,2}w_i + 3g_{i+1,3}w_i^2 \quad (4b)$$

y

$$2g_{i,2} + 6g_{i,3}w_i = 2g_{i+1,2} + 6g_{i+1,3}w_i, \quad (4c)$$

para  $i = 1, \dots, k-1$ . El carácter periódico de la función y de sus dos primeras derivadas se garantiza imponiendo las restricciones adicionales

$$g_{k,0} + g_{k,1} + g_{k,2} + g_{k,3} = g_{1,0}, \quad (5a)$$

$$g_{k,1} + 2g_{k,2} + 3g_{k,3} = g_{1,1} \quad (5b)$$

y

$$2g_{k,2} + 6g_{k,3} = 2g_{1,2}. \quad (5c)$$

Nótese que la función será periódica en términos de la fracción del periodo estacional, pero no necesariamente de la estación.

Dado que existen  $4k$  parámetros y se establecen  $3k$  restricciones, los parámetros del vector  $G_{3k \times 1} = (g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}, \dots, g_{k,1}, g_{k,2}, g_{k,3})'$  pueden expresarse como funciones de los parámetros del vector  $G_{k \times 1}^* = (g_{1,0}, g_{2,0}, \dots, g_{k,0})'$ . En formulación matricial, las condiciones anteriores pueden escribirse como  $TG = R$ , donde

$$T_{3k \times 3k} = \begin{bmatrix} w_1 & w_1^2 & w_1^3 & -w_1 & -w_1^2 & -w_1^3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{k-1} & w_{k-1}^2 & w_{k-1}^3 & -w_{k-1} & -w_{k-1}^2 & -w_{k-1}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2w_1 & 3w_1^2 & -1 & -2w_1 & -3w_1^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2w_{k-1} & 3w_{k-1}^2 & -1 & -2w_{k-1} & -3w_{k-1}^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6w_1 & 0 & -2 & -6w_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 6w_{k-1} & 0 & -2 & -6w_{k-1} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

y

$$R_{3k \times 1} = \begin{bmatrix} -g_{1,0} + g_{2,0} \\ \vdots \\ -g_{k-1,0} + g_{k,0} \\ -g_{k,0} + g_{1,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,  $G = T^{-1}R$ . Si la inversa de la matriz  $T$  se expresa como

$$T^{-1}_{3k \times 3k} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,3k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{3k,1} & a_{3k,2} & \cdots & a_{3k,3k} \end{bmatrix}$$

y se denotan por  $g_r$ ,  $r=1, \dots, 3k$ , los parámetros  $g_1 = g_{1,1}$ ,  $g_2 = g_{1,2}$ ,  $g_3 = g_{1,3}$ ,  $g_4 = g_{2,1}$ ,  $g_5 = g_{2,2}$ ,  $g_6 = g_{2,3}$ ,  $\dots$ ,  $g_{3k-2} = g_{k,1}$ ,  $g_{3k-1} = g_{k,2}$  y  $g_{3k} = g_{k,3}$ , entonces

$$g_r = \alpha_{r,1}g_{1,0} + \alpha_{r,2}g_{2,0} + \dots + \alpha_{r,k-1}g_{k-1,0} + \alpha_{r,k}g_{k,0}, \quad (6)$$

donde  $\alpha_{r,1} = -a_{r,1} + a_{r,k}$ ,  $\alpha_{r,i} = a_{r,i-1} - a_{r,i}$ ,  $i=2, \dots, k$ , para  $r=1, \dots, 3k$ . Ahora, la *spline* puede formularse como una función de los parámetros  $g_{i,0}$ ,  $i=1, \dots, k$ , es decir,

$$g(w) = g_{1,0}X_{1,w} + g_{2,0}X_{2,w} + \dots + g_{k-1,0}X_{k-1,w} + g_{k,0}X_{k,w}, \quad (7)$$

donde

$$X_{i,w} = D_{i,w} + (\alpha_{1,i}w + \alpha_{2,i}w^2 + \alpha_{3,i}w^3)D_{1,w} + (\alpha_{4,i}w + \alpha_{5,i}w^2 + \alpha_{6,i}w^3)D_{2,w} + \dots + (\alpha_{3k-2,i}w + \alpha_{3k-1,i}w^2 + \alpha_{3k,i}w^3)D_{k,w} \quad (8)$$

para  $i=1, \dots, k$ ,  $D_{i,w} = \begin{cases} 1, & \text{si } w_{i-1} \leq w < w_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ ,  $i=1, \dots, k-1$ , y  $D_{k,w} = \begin{cases} 1, & \text{si } w_{k-1} \leq w \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ .

La especificación anterior exige determinar el número de tramos y la localización precisa de los puntos de ruptura que los delimitan. En este sentido, alguna aproximación previa de las variaciones estacionales,  $\hat{\gamma}_t^1$ , puede ser suficiente para identificar los principales cambios de curvatura en el patrón estacional que pretenden ser modelados y decidir en consecuencia el número de puntos de ruptura necesarios. Entonces, las localizaciones de los puntos de ruptura pueden elegirse como aquéllas que minimicen la suma de cuadrados de residuos en la estimación del modelo de regresión

$$\hat{\gamma}_t^1 = g_{1,0}X_{1,t} + g_{2,0}X_{2,t} + \dots + g_{k-1,0}X_{k-1,t} + g_{k,0}X_{k,t} + \xi_t, \quad (9)$$

donde  $X_{i,t} = X_{i,w}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , si la observación en el instante del tiempo  $t$  corresponde a una estación tal que la fracción que indica la parte transcurrida del periodo estacional es  $w$ . Una alternativa a la suma de cuadrados de los residuos como criterio de optimización es la suma de desviaciones absolutas. Sin embargo, esta alternativa implica que los cambios abruptos en la forma del patrón estacional tengan menos efecto en la especificación elegida y, en cualquier caso, podrían pasar más desapercibidos determinados cambios en la forma de dicho patrón.

El modelo propuesto es suficientemente flexible para recoger un patrón estacional tal que en instantes del tiempo a los que corresponde la misma proporción de la longitud del periodo estacional la magnitud de la variación estacional no sea siempre constante. Si en la serie observada se han registrado  $m$  periodos estacionales de longitud  $s_c$ ,  $c = 1, \dots, m$ , entonces, para cada uno de estos subperiodos, la variación estacional puede recogerse como una *spline* con parámetros específicos, es decir,  $\gamma_t = g(t) + \xi_t$ , donde la *spline*  $g(t)$  se expresa como

$$g(t) = \sum_{c=1}^m [g_{1,0}^c X_{1,t} + \dots + g_{k,0}^c X_{k,t}] D_{c,t}^{sp}, \quad (10)$$

donde  $D_{c,t}^{sp} = \begin{cases} 1, & t \in \text{sub-periodo } c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ ,  $c = 1, \dots, m$ , y  $X_{i,t} = X_{i,w}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , si la observación en

el instante  $t$  corresponde a la estación  $j_c$  del sub-periodo  $c$  tal que  $w = \frac{j_c}{s_c}$ . Incluso cabe asumir

que los puntos de ruptura sean diferentes en los distintos subperiodos considerados, pero esta especificación sería posiblemente demasiado laxa. Si se asume entonces que los puntos de

27/10/2008

ruptura son fijos y  $g_{i,0}^c = g_{i,0}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $c = 1, \dots, m$ , este modelo proporciona una ganancia en parsimonia que no puede obtenerse si se mantiene la definición de la variación estacional como función de la estación a la que pertenece el dato.

La ganancia en parsimonia de la especificación propuesta es directamente proporcional a los cambios en la longitud del periodo estacional siempre y cuando se mantenga la forma del patrón estacional. Y cierta ganancia puede obtenerse incluso en el caso en que las estaciones concretas sean distintas aunque no se modifique la longitud del periodo estacional. En cualquier caso, la elección de la especificación apropiada del componente estacional exige obtener una aproximación previa de éste. Dada la naturaleza inobservable de los componentes, la especificación elegida para uno de ellos tiene consecuencias en la especificación del otro. Por tanto, es importante que a partir de la serie temporal el procedimiento utilizado para extraer una aproximación del componente estacional sea capaz de capturar sus características relevantes a efectos de la formulación del modelo. En particular, la aproximación elegida debe reflejar los cambios experimentados en la forma del patrón estacional. En series en las que estén presentes variaciones estacionales superpuestas tales como, por ejemplo, una serie horaria, en la que cabría pensar que estén presentes variaciones de periodo anual, mensual, semanal y diario, una herramienta potencialmente apropiada consiste en descomponer la variabilidad total en ondas armónicas asociadas a las distintas frecuencias observables. Pero la tradicional transformación de Fourier descompone la variabilidad total en variaciones cíclicas cada una de las cuales posee un periodo constante. De este modo, el procedimiento convencional no parece apropiado si el objetivo del mismo es extraer una variación periódica en la que, sin embargo, el periodo no es necesariamente constante a lo largo de la muestra observada. De ahí que puedan resultar útiles otros procedimientos basados en el cálculo de medias móviles con un número de términos apropiado en función del número de estaciones que completan la fluctuación estacional a la que pertenece el dato observado, como se ilustra en la serie que se analiza en el apartado siguiente.

### **3. Aplicación a la serie semanal de exportaciones de tomate de Canarias**

La metodología propuesta se aplica en esta sección para describir el patrón estacional de la serie de exportaciones de tomate de Canarias al extranjero desde la campaña 1980/1981 hasta la

2004/2005<sup>2</sup>. Antes de formular un modelo capaz de captar los movimientos experimentados por esta serie, conviene señalar algunas características generales de esta actividad. En primer lugar, el patrón estacional de la exportación canaria se ha caracterizado históricamente por la concentración en el invierno y la desaparición en el verano. Este patrón de comportamiento es una respuesta racional de los productores guiada por la búsqueda de rentabilidad. Es decir, no hay exportación en verano porque la convergencia en la misma estación de la oferta procedente de los países del norte de Europa y la oferta canaria da lugar a precios más bajos. En segundo lugar, el desarrollo de los cultivos de invernadero en los países del norte de Europa, el incremento en la oferta de la España peninsular y la aparición de producciones de terceros países que comparten el mismo periodo exportador que la producción canaria han determinado un solapamiento creciente de las diferentes ofertas en primavera y otoño. Finalmente, la plena integración española en la PAC ha significado la desaparición de las herramientas con que las producciones europeas se protegían comercialmente frente a la producción canaria<sup>3</sup>, y estos cambios han encontrado una respuesta inmediata en los productores de las Islas, a pesar de que los magrebíes han disfrutado también de una reducción notable de las barreras comunitarias<sup>4</sup>.

El análisis de la evolución de la serie permite distinguir tres periodos diferentes en cuanto al comportamiento de largo plazo. La nueva situación comercial de Canarias con respecto a la UE desde julio de 1991 (los precios de referencia fueron sustituidos por los precios de oferta) y, sobre todo, la plena integración en la UE desde el 1 de enero de 1993 (abolición del sistema de precios de referencia/oferta) se traduce en un notable impulso exportador. El crecimiento general de las exportaciones en este segundo periodo se trunca en 1996, coincidiendo con la entrada en vigor del acuerdo comercial entre la UE y Marruecos. Durante las últimas campañas, los problemas de

---

<sup>2</sup> Los datos se han obtenido de las memorias de campaña publicadas por la Asociación de Cosecheros Exportadores de Tomate de Santa Cruz de Tenerife (ACETO).

<sup>3</sup> El sistema de precios de referencia impedía, en la práctica, que la producción canaria accediera a los mercados europeos a partir del mes de abril de cada año. Este sistema fue sustituido por otro más flexible —el sistema de precios de oferta— a partir de julio de 1991. Desde el 1 de enero de 1993 desapareció el sistema de precios de oferta y se liberalizaron las exportaciones canarias a la Comunidad, exceptuando el mantenimiento del mecanismo complementario aplicable a los intercambios, de muy escasa incidencia. La explicación detallada de estos instrumentos de protección puede consultarse en Cáceres (2000:292-305).

<sup>4</sup> Desde la firma del Protocolo entre Marruecos y la UE en 1988 y hasta la plena integración española en la PAC, la producción magrebí accedía a los mercados europeos en similares condiciones que la producción canaria. Los acuerdos del GATT de 1994 significaban un endurecimiento de las condiciones de acceso de la producción marroquí, pero estas condiciones quedaron sin efecto en virtud de los acuerdos comerciales UE-Marruecos de 1995 y 1996. Las condiciones de acceso a los mercados europeos para la producción marroquí se analizan en Cáceres (2000:278-281, 308-312). Durante el periodo analizado, los acuerdos más recientes entre la UE y Marruecos se recogen en los Reg (CE) nº 747/2001 y Reg (CE) nº 37/2004. Véase también Reg (CE) nº 503/2005.

27/10/2008

calidad, los bajos precios y las expectativas de los exportadores han dado lugar a un nuevo descenso de los niveles de exportación. Estas inestabilidades en el comportamiento a largo plazo pueden ser adecuadamente recogidas mediante modelos estructurales de series temporales (Harvey, 1989).

Con respecto al patrón estacional, cada campaña se caracteriza por un movimiento ascendente que comienza en octubre y finaliza en enero o febrero, seguido de otro descendente hasta mayo o junio. Sin embargo, el periodo de exportación no se ha mantenido estable en todas las campañas del periodo analizado. Durante la década de los 80, la zafra solía terminar a principios de mayo, cuando la coincidencia con la producción europea terminaba por significar una disminución de precios que llevaba finalmente a la aplicación de aranceles derivados de la aplicación del sistema de precios de referencia y a la supresión de las exportaciones canarias. El cambio de normativa iniciado en julio de 1991 y, sobre todo, la transformación definitiva con la entrada plena en la PAC a partir del 1 de enero de 1993, producen una extensión de la campaña hasta junio desde principios de la década de 1990 hasta la actualidad. Además, el inicio de zafra, habitualmente localizado en torno a la semana 40, se ha adelantado en algunas campañas, tal vez como consecuencia de la influencia de factores climatológicos o estrategias empresariales. Ahora bien, teniendo en cuenta que en algunas semanas, estas exportaciones reflejan comportamientos anómalos, se ha optado por excluirlas del análisis y considerar sólo las exportaciones correspondientes a las semanas posteriores a aquélla a partir de la cual existen exportaciones regulares<sup>5</sup>. Esta decisión implica considerar que la variación estacional relevante es aquélla que se inicia con el comienzo de la campaña exportadora y termina con el cese de la misma. De hecho, las exportaciones con valor nulo no proporcionan información económica relevante más allá de la que se deriva de la longitud del periodo sin exportación, que está implícita en la variación estacional que se modela<sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup> En concreto, se eliminaron las observaciones correspondientes a las semanas 27 y 33 a 38 de 1995, 27 de 1997, 34 de 1998, 36 de 1999, 35 y 36 de 2000, 30 a 36 de 2001, 35 de 2002 y 27 y 30 a 36 de 2004. Sin embargo, y a pesar de que se registraron exportaciones nulas en las semanas 16 de 1986, 15 de 1988 y 14 de 1990, estas observaciones no fueron eliminadas ya que están situadas dentro del periodo de exportación. Y, posiblemente, la nula exportación sea una respuesta a la aplicación del sistema de precios de referencia (véase Cáceres, 2000:315).

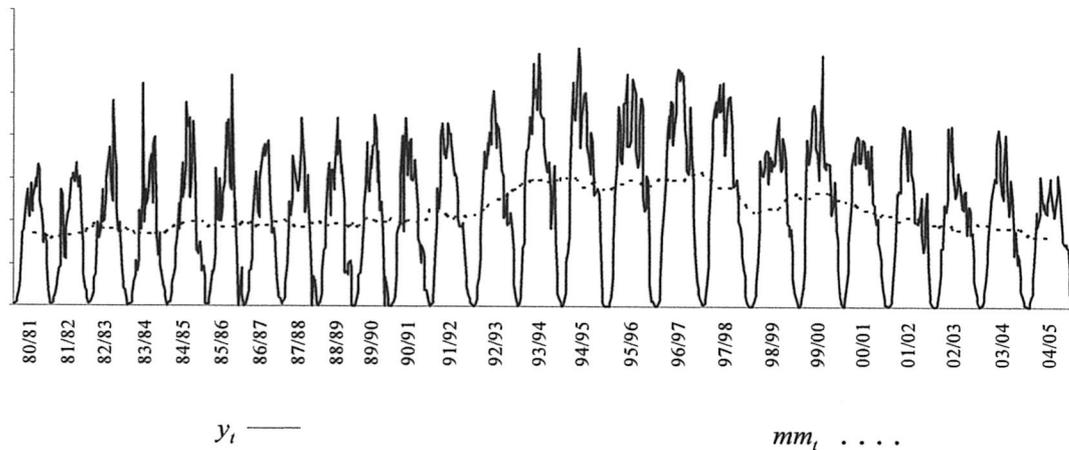
<sup>6</sup> Por otra parte, existe un argumento estadístico-econométrico a favor de la decisión adoptada, en tanto que mantener las observaciones nulas en la serie obliga a introducir características especiales en los términos de perturbación que guían la conducta del proceso estocástico. En concreto, sería preciso admitir la naturaleza heteroscedástica del componente residual.

El resultado de los comportamientos indicados es que en la serie finalmente analizada, que se denotará por  $\{y_t\}_{t=1,\dots,899}$  (gráfico 1), la longitud del periodo de exportación oscila entre 30 y 41 semanas (cuadro 1). Por tanto, la metodología antes descrita puede resultar útil para captar esta heterogeneidad<sup>7</sup>.

Cuadro 1. Longitud del periodo de exportación

Longitud, $s_c$	Campaña, $c$
30	89/90
31	80/81, 88/89
32	81/82, 85/86, 86/87, 87/88, 90/91
33	82/83, 83/84, 84/85
37	92/93, 93/94, 99/00
38	91/92, 00/01, 01/02
40	94/95, 95/96, 96/97, 97/98, 03/04
41	98/99, 02/03, 04/05

Gráfico 1. Exportaciones semanales de tomate canario al extranjero

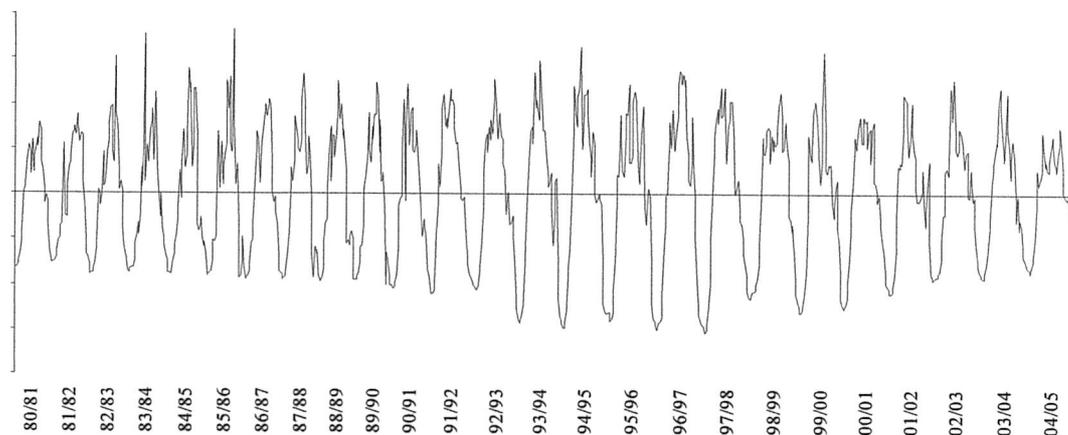


Como se expuso en la sección metodológica, la especificación de la *spline* que recoge el componente estacional requiere la obtención de una aproximación previa de dicho componente.

<sup>7</sup> Una formulación alternativa en términos de componentes determinísticos cambiantes fue utilizada para analizar una serie similar en Cáceres (2001). Martín *et al.* (2002) comparan los resultados del enfoque anterior con un enfoque convencional de modelos estructurales. Y Martín y Cáceres (2005) introducen funciones *splines* para modelar el comportamiento estacional de la serie de exportaciones dividiendo la muestra en dos subperiodos y asumiendo que en todas las campañas pertenecientes al mismo subperiodo la longitud del periodo estacional es constante y el patrón estacional es estable.

En este sentido, se ha optado por aproximar este movimiento de largo plazo a través del cálculo de medias móviles,  $\{mm_t\}_{t=16,\dots,879}$ <sup>8</sup>. Las diferencias entre la serie original y esta aproximación del componente de largo plazo proporcionan, a su vez, una aproximación del componente estacional<sup>9</sup>,  $\{\hat{\gamma}_t^1\}_{t=1,\dots,899}$ , una vez corregida de modo que la suma de las variaciones estacionales en cada campaña se anule (gráfico 2).

Gráfico 2. Aproximación previa del componente estacional,  $\hat{\gamma}_t^1$



Esta aproximación se utilizará con objeto de decidir el número de tramos de la *spline* así como la localización de éstos, asumiendo inicialmente que una *spline* fija es capaz de recoger la variación estacional en cada campaña. Se optó por una especificación de 6 tramos. A la hora de seleccionar los puntos de ruptura, se optó por considerar que todos ellos pertenecen al conjunto de fracciones  $\left\{\frac{l}{q}\right\}_{l=1,\dots,q}$ . Y, si bien, el valor de  $q$  puede elegirse como el mínimo común múltiplo de las longitudes observadas cuando el número de longitudes diferentes es reducido, en la serie analizada se ha optado por fijar un valor de  $q$  igual a 1000, que divide el intervalo continuo  $(0,1)$  en una *rejilla* suficientemente densa. Los puntos de ruptura se localizaron en las fracciones

<sup>8</sup> En cada instante del tiempo, la media móvil se ha calculado utilizando tantos términos como semanas contenga la campaña a la que pertenece el dato.

<sup>9</sup> En el caso de la aproximación obtenida a partir de las medias móviles, los datos de las primeras 15 semanas de la campaña 1980/1981 y las últimas 20 de la campaña 2004/2005 corresponden a los obtenidos a través de la estimación de una *spline* lineal de tres tramos que pretenden recoger las fases ya comentadas de estancamiento de la década de 1980, de crecimiento durante la primera mitad de la década de 1990 y, finalmente, de descenso hasta la última campaña considerada. Más específicamente, los puntos de ruptura se han localizado en la última semana de las campañas 1990/1991 y 1995/1996.

27/10/2008

$w_1 = 0.057$ ,  $w_2 = 0.346$ ,  $w_3 = 0.490$ ,  $w_4 = 0.658$  y  $w_5 = 0.659$ . La determinación del número de puntos de ruptura es resultado de la necesidad de conseguir que la *spline* especificada sea capaz de capturar los cambios principales de curvatura en la forma del patrón estacional observado; mientras que la localización exacta de estos puntos es aquella que proporciona un mejor ajuste.

Una vez elegidos los puntos de ruptura, es preciso decidir qué campañas presentan patrones estacionales homogéneos. En este sentido, la especificación de la *spline* que asume patrones diferentes cada campaña podría incorporarse en un modelo estructural y utilizar *tests F* para contrastar si dos campañas consecutivas tienen comportamientos estacionales homogéneos. Sin embargo, dada la naturaleza *a priori* estocástica del componente de nivel, los *tests* anteriores estarían sesgados hacia el no rechazo de la hipótesis de homogeneidad. Por esta razón, se ha optado por diseñar una estrategia de contraste de estos supuestos a partir de la estimación del modelo paramétrico lineal

$$\hat{\gamma}_t^1 = \sum_{c=1}^{25} [g_{1,0}^c X_{1,t} + \dots + g_{6,0}^c X_{6,t}] D_{c,t}^{sp} + \xi_t, \quad (11)$$

donde la variable dependiente es la aproximación previa del componente estacional, de modo que no se precisa incorporar la especificación de ningún otro componente en el modelo. En una primera fase, cada campaña se comparó con la campaña siguiente, resultando similares los patrones estacionales de las campañas 87/88 y 88/89 y 88/89 y 89/90. Y el mismo resultado se obtuvo para las campañas 91/92 y 92/93. En una segunda fase, no fue posible rechazar la hipótesis de homogeneidad del patrón estacional en las campañas 87/88, 88/89 y 89/90 y tampoco se rechazó la hipótesis de homogeneidad de las campañas 91/92 y 92/93<sup>10</sup>.

---

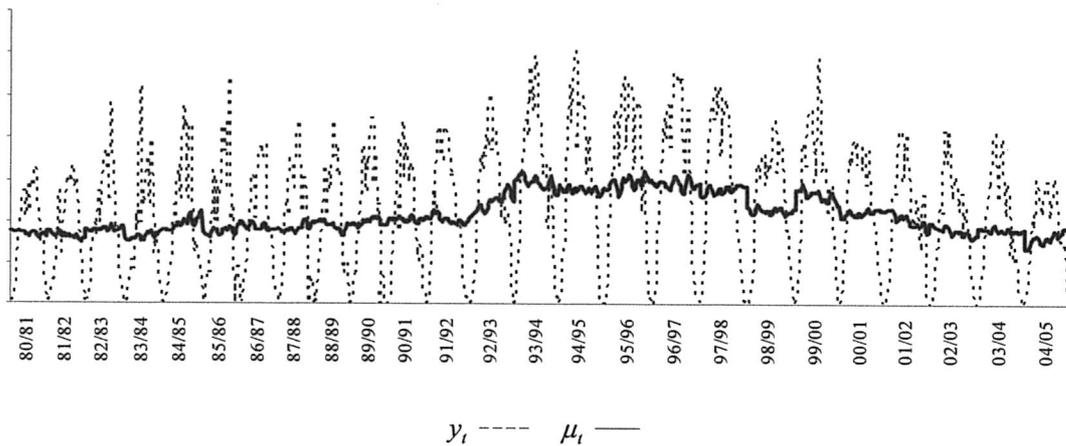
<sup>10</sup> Las conclusiones obtenidas a partir de estos contrastes se sustentan en la hipótesis de combinación aditiva de tendencia y estacionalidad. Sin embargo, la observación de los gráficos 1 y 2 sugiere que en las campañas con niveles de exportación más altos, también son más acentuadas las variaciones estacionales. De modo que podría intuirse la conveniencia de formular un modelo multiplicativo. Ahora bien, la aplicación de la transformación logarítmica significa que las diferencias en los niveles de exportación en las semanas de la campaña menos relevantes son las que, en mayor medida, determinan las similitudes o diferencias entre campañas. De hecho, la sustitución del valor nulo de las exportaciones registradas en las semanas 16 de 1986, 15 de 1988 y 14 de 1990 por un valor nulo para la serie en logaritmos, significa introducir un salto de magnitud notable entre esa observación y las observaciones más próximas. Por esta razón, antes de aplicar la metodología propuesta a la nueva serie, se optó por sustituir estas observaciones nulas por el promedio de las dos observaciones contiguas. En cualquier caso, se procedió a la aplicación de la metodología propuesta a la serie en logaritmos. Pero la aproximación previa del componente estacional y los posteriores contrastes *F* mostraron que esta transformación no contribuye a reducir la variabilidad del patrón estacional. Dado que no existe, por tanto, una ventaja estadística aparente, y que, desde el punto de vista económico, las diferencias en el patrón estacional no descansan en las semanas más relevantes para determinar los beneficios del exportador, parece más apropiado obtener conclusiones a partir de la serie en niveles.

De acuerdo con los resultados de los *tests F* para la serie en niveles, se especificó el modelo estructural

$$\begin{aligned}
 y_t = & \mu_t + \sum_{c=1, \dots, 7, 11, 14, \dots, 24} [g_{1,0}^c X_{1,t} + \dots + g_{6,0}^c X_{6,t}] D_{c,t}^{sp} \\
 & + [g_{1,0}^{8,9,10} X_{1,t} + \dots + g_{6,0}^{8,9,10} X_{6,t}] (D_{8,t}^{sp} + D_{9,t}^{sp} + D_{10,t}^{sp}) \\
 & + [g_{1,0}^{12,13} X_{1,t} + \dots + g_{6,0}^{12,13} X_{6,t}] (D_{12,t}^{sp} + D_{13,t}^{sp}) \\
 & + [g_{1,0}^{25} X_{1,t} + \dots + g_{5,0}^{25} X_{5,t}] D_{25,t}^{sp} \\
 & + \lambda_{1,1984} I_{1,1984} + \lambda_{11,1986} I_{11,1986} + \lambda_{51,1990} I_{51,1990} + \varepsilon_t
 \end{aligned} \tag{12}$$

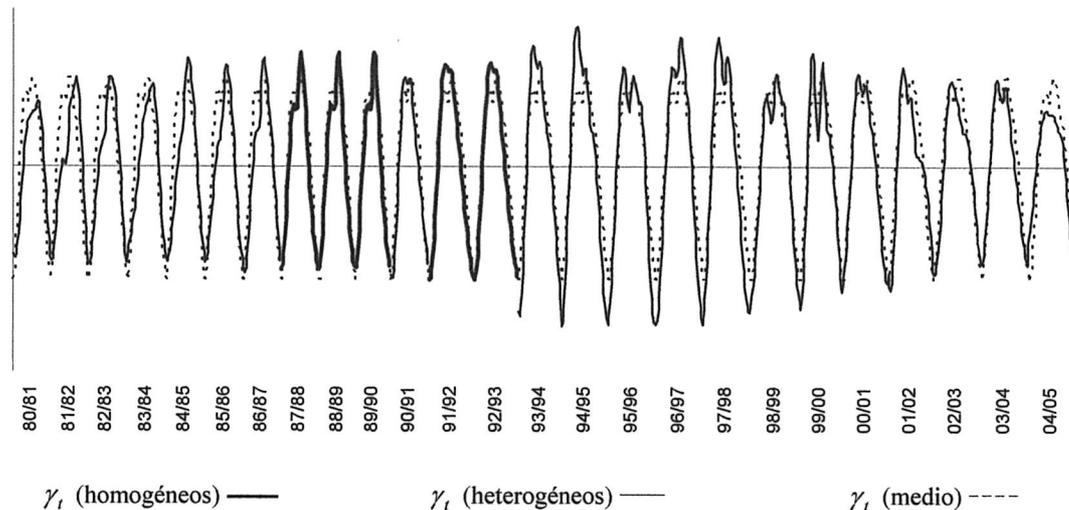
donde  $\mu_t$  se ha formulado como un modelo de nivel local. Nótese que se ha eliminado el regresor  $X_{6,t} D_{25,t}^{sp}$  con objeto de evitar problemas de multicolinealidad. Además, se han incorporado variables de intervención tipo impulso para capturar las anomalías detectadas en las semanas 1 de 1984 (14 de la campaña 83/84), 11 de 1986 (23 de la campaña 85/86) y 51 de 1990 (11 de la campaña 90/91)<sup>11</sup>. Las estimaciones de los componentes de nivel y estacional obtenidas a partir de este modelo se muestran en los gráficos 3 y 4. Nótese que la estimación del componente de largo plazo a partir del modelo estructural es similar a la aproximación que se obtuvo de este componente mediante el cálculo de medias móviles de periodo cambiante.

Gráfico 3. Estimaciones del componente de nivel



<sup>11</sup> Las observaciones anómalas fueron detectadas utilizando los procedimientos implementados en el programa STAMP 6.0 (Koopman *et al.*, 2000), que se utilizó para estimar los modelos estructurales.

Gráfico 4. Estimaciones del componente estacional



En el gráfico del componente estacional, se ha representado también un patrón estacional medio obtenido como resultado de la estimación de una *spline* fija ajustada a la estimación del componente estacional en el modelo estructural. De esta forma, es posible apreciar la variabilidad en la forma del patrón estacional. A pesar de los cambios observados en dicho patrón, la forma de este componente sigue siendo suave y, de hecho, se caracteriza por un crecimiento más o menos acentuado hasta obtener el máximo nivel y un descenso posterior hasta que finaliza la actividad exportadora de la campaña.

#### 4. Conclusiones

La metodología propuesta se ha mostrado como una herramienta apropiada para modelar patrones estacionales heterogéneos. En particular, en series que experimentan cambios frecuentes pero de poca relevancia en la longitud del periodo estacional, de modo que no se produzcan cambios sustanciales en la forma del patrón estacional, la redefinición del componente estacional en términos no ya de la estación misma sino de la fracción o parte del periodo estacional que ha transcurrido en cada instante del tiempo, puede significar una ganancia relevante en términos de parsimonia. Además, la formulación adoptada hace posible modelar comportamientos estacionales de periodo no constante sin necesidad de eliminar observaciones relevantes ni dividir artificialmente la muestra. Nótese que esta separación muestral, obligatoria si se recurre a formulaciones convencionales, puede suponer la introducción de notables distorsiones en la estimación de la dinámica de largo plazo.

Por otra parte, en el caso de que la forma del patrón estacional o la propia magnitud de las variaciones estacionales impidan considerar la estabilidad de éste, la formulación propuesta es suficientemente flexible para capturar estas inestabilidades. Además, la formulación del patrón estacional en términos de parámetros de magnitud variable significa, no sólo una evidente ganancia en parsimonia, sino también que puedan considerarse periodos con diferente grado de estabilidad en la magnitud de las variaciones estacionales. Es decir, la intensidad de los cambios en el patrón estacional no está necesariamente dirigida por la dinámica más o menos rígida que impone la varianza de los términos de perturbación del proceso de camino aleatorio que se asume para cada efecto estacional en los modelos estocásticos convencionales. Por el contrario, el modelo formulado se construye tratando de identificar los cambios en la media del proceso estocástico que recoge la variación estacional a partir de los cambios observados en la forma de este patrón. Por tanto, todos los elementos que intervienen en la especificación de la *spline* propuesta no son resultado de un proceso matemático de optimización orientado hacia la consecución de un ajuste óptimo. Por último, la suavidad propia de las funciones *splines* ajustadas, derivada de las características de la función polinómica básica y de las restricciones que se le imponen, se traduce en una mayor facilidad para describir los patrones estacionales que resulta útil a quienes tienen que tomar decisiones teniendo en cuenta sistemáticamente la naturaleza estacional de los datos relativos a la actividad económica.

Estas ventajas se han hecho evidentes en la aplicación a la serie semanal de exportaciones analizada, pero pueden acentuarse en series de más alta frecuencia. Por ejemplo, en series diarias el componente estacional puede ser el resultado de combinar fluctuaciones de periodo anual, mensual y semanal. En el caso particular de la variación de periodo mensual, la formulación anterior resulta especialmente apropiada para recoger este comportamiento estacional en meses con diferente número de días, que, por supuesto, no puede recogerse acudiendo a formulaciones convencionales, tanto determinísticas como estocásticas. Y, en general, cuando las observaciones registradas corresponden a puntos irregularmente espaciados en un intervalo continuo de tiempo, parece más natural e informativo asociar los datos observados con la fracción del periodo estacional y no con la estación.

### **Referencias bibliográficas**

Cáceres, JJ (2000). *La Exportación de Tomate en Canarias. Elementos para una estrategia competitiva*. Ediciones Canarias.

27/10/2008

- Cáceres, JJ (2001) «Optimalidad del patrón estacional de las exportaciones canarias de tomate», *Estudios de Economía Aplicada* **18**:41-66.
- Engle, RF (2000) «The econometrics of ultra-high-frequency data», *Econometrica* **68**(1):1-22.
- Eubank, RL (1988) *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. New York: M. Dekker.
- Ferreira, E, V Núñez-Antón y J Rodríguez-Póo (2000) «Semiparametric approaches to signal extraction problem in economic time series», *Computational Statistics & Data Analysis* **33**:315-333.
- Harvey, AC (1989) *Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.
- Harvey, AC y SJ Koopman (1993) «Forecasting hourly electricity demand using time varying splines», *Journal of the American Statistical Association* **88**:1228-1236.
- Harvey, AC, SJ Koopman y M Riani (1997) «The modelling and seasonal adjustment of weekly observations», *Journal of Business and Economic Statistics* **15**(3):354-368.
- Hylleberg, S (1992) *Modelling Seasonality*. Oxford University Press.
- Koopman, SJ, AC Harvey, JA Doornik y N Shephard (2000) *Stamp 6.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. Timberlake Consultants.
- Koopman, SJ y M Ooms (2005) «Forecasting daily time series using periodic unobserved components time series models», *Computational Statistics & Data Analysis* **51**:885-903.
- Martín, G, VJ Cano y JJ Cáceres (2002) «Exportación de tomate en Canarias: ¿un patrón estacional estable?», *Economía Agraria y Recursos Naturales*, **2**(2):53-72.
- Martín, G y JJ Cáceres (2005) «Modelling weekly Canary tomato exports», *Agricultural Economics*, **33**:255-267.
- Orbe, S, E Ferreira y J Rodríguez-Póo (2005) «Nonparametric estimation of time varying parameters under shape restrictions», *Journal of Econometrics* **126**:53-77.
- Pedregal, DJ y PC Young (2006) «Modulated cycles, an approach to modelling periodic components from rapidly sampled data», *International Journal of Forecasting*, **22**:181-194.
- Poirier, DJ (1976) *The Econometrics of Structural Change*, Amsterdam, North Holland Publishing Company.