

CIENCIAS DE LA NATURALEZA
EN AL-ANDALUS

TEXTOS Y ESTUDIOS

IV

Editados por Camilo Alvarez de Morales

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS ÁRABES
GRANADA, 1996

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del «Copyright», bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.



© CSIC

© C. Álvarez de Morales

ISBN: 84-00-07026-7 (Obra completa)

ISBN: 84-00-07587-0 (Textos y estudios)

Depósito Legal: GR-523-1996

Impreso en España. *Printed in Spain*

Imprime: T.G. ARTE, Juberías & CIA, S.L.

18200-MARACENA (Granada)

Se publica el volumen IV de *Ciencias de la Naturaleza en al-Andalus* con un marcado carácter de continuidad respecto a los tres primeros. El interés de los temas tratados y la calidad de los trabajos presentados en los números precedentes hacían aconsejable mantener esta línea.

Aparecen en estas páginas nombres que ya figuraron en los volúmenes anteriores, junto a otros que lo hacen por primera vez. En uno y otro caso, se trata de especialistas de solvencia reconocida cuyas aportaciones siguen enriqueciendo el campo de los estudios sobre las ciencias relacionadas con la naturaleza, dentro del mundo de la cultura andalusí. Quiero agradecer a todos ellos que hayan atendido mi petición de colaboración, que ha hecho posible que hoy dispongamos de este volumen, nuevamente materializado en su parte de composición informática por el buen hacer de Rafael Reyna.

Camilo Alvarez de Morales
Granada, mayo de 1996

ÍNDICE

Carabaza Bravo (Julia M ^a) <i>El olivo en los tratados agronómicos clásicos y andalusíes.</i>	11
Fahd (Toufic) <i>L'agriculture nabatéenne en Andalousie.</i>	41
El Faïz (Muḥammad) <i>L'apport des agronomes d'al-Andalus à l'histoire de la pensée économique.</i>	53
Glick (Thomas F.) <i>Riego y tecnología hidráulica en la España Islámica: consideraciones metodológicas.</i>	71
Aguiar Aguilar (Maravillas) <i>Las aplicaciones del cuadrante de senos en agrimensura a través de un tratado árabe oriental del siglo XIV.</i>	93
García Sánchez (Expiración) <i>La flora de Sierra Nevada a través de los autores árabes.</i>	115
Lozano Cámara (Indalecio) <i>Terminología científica árabe del cáñamo (ss. VII-XVIII).</i>	147
Trillo San José (Carmen) <i>El nombre de las plantas en el Vocabulario del Padre Guadix.</i>	165
Vázquez de Benito (Concepción) <i>Adiciones a los diccionarios árabes (V).</i>	199
Navarro García (M ^a Angeles) <i>Clasificación temática de las fuentes del Kitāb al-Ŷāmi'.</i>	215
Llavero Ruiz (Eloísa) <i>Estudio farmacológico de la Maqāla XXI del Kitāb al-Taṣrīf de al-Zahrāwī.</i>	235

Molina López (Emilio)

Un modelo de estructura y paisaje agrarios: la Vega de Granada según Ibn al-Jaṭīb.

257

Alvarez de Morales (Camilo) & Roldán Castro (Fátima)

Sobre el caballo en la cultura árabe.

265

* * *

LAS APLICACIONES DEL CUADRANTE DE SENOS EN AGRIMENSURA A TRAVÉS DE UN TRATADO ÁRABE ORIENTAL DEL SIGLO XIV

Maravillas Aguiar Aguilar¹
Facultad de Filología, Universidad de La Laguna

1. Introducción. El 'ilm al-misāḥa. El uso de instrumentos en problemas de mīqāt (astronomía religiosa) y de misāḥa (agrimensura)

En la tradición matemática árabe, la geometría (*handasa*) es una disciplina con aplicaciones múltiples: construcción de figuras geométricas, astronomía, mecánica, óptica, agrimensura². Entre ellas figura el *'ilm al-misāḥa* o ciencia de la medición. El *misāḥa* se ocupa de la comparación de las medidas y de los métodos para obtenerlas y, en sentido lato, designa la medición de todo aquello que puede ser medido, ya sean longitudes, superficies, volúmenes, pesos o cantidades. El *'ilm al-misāḥa* se ocupa, pues, de establecer las reglas destinadas al cálculo de longitudes, superficies y volúmenes de los diferentes cuerpos geométricos³.

El *misāḥa* es una de las aplicaciones de la geometría y por ello aparece en los tratados árabes de cálculo. Estos tratados suelen incluir tres temas a modo de tópico: el álgebra, el cálculo aritmético y lo que los árabes llaman *misāḥa*⁴. En estos tratados estas tres materias se explican siguiendo siempre este orden. No obstante, cada una de ellas puede aparecer tratada monográficamente en obras especializadas⁵.

1. La autora quiere agradecer las correcciones y los útiles comentarios que el Profesor Julio Samsó hizo amablemente a este trabajo.

2. Cf. A. Djebbar, *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb Medieval (IX^e-XVI^e s.)*. *Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulmane* [Tesis doctoral], s.l., s.d., tomo I, p. 12.

3. Cf. H. Schirmer, "Misāḥa", *Encyclopédie de l'Islam*. Nouvelle édition. Leiden-Paris, 1960 y ss. [en adelante *EI*²], vol. VII, p.137. Este es el mismo artículo aparecido en la primera edición de esta enciclopedia, *vid. s.v. E.J. Brill's First Encyclopaedia of Islam 1913-1936*, 9 vols., Leiden-New York-København-Köln, 1987 [en adelante *EI*¹].

4. Cf. A. Marre, "Le messāhat de Mohammed ben Moussa al Khārezmi. Extrait de son algèbre. Traduit et annoté par [...]". *Annali di Matematica pura ed applicata*, VII (1865). Reimpresión Johnson Reprint Corporation, New York, s.d., p.271.

5. Cf. A. Marre, *ibidem*.

Por otro lado, podemos constatar cómo en los tratados de construcción y uso de diferentes instrumentos islámicos se incluyen capítulos relativos a la resolución de problemas que no tienen que ver con la astronomía y, en particular, con la astronomía religiosa o *mīqāt*. Esta es la aplicación más conocida de instrumentos como el astrolabio, la azafea de Azarquiel, la lámina universal, el cuadrante... y ha sido estudiada en numerosas ocasiones en distintos trabajos. Además de estos problemas estrictamente relacionados con el *mīqāt*, había otros que se resolvían con la ayuda de los cuadrantes que se grababan en el dorso del instrumento, generalmente el cuadrante de sombras o el cuadrante de senos. Por ello en los tratados de construcción y uso de estos instrumentos encontramos capítulos que explican el uso de estos cuadrantes para resolver problemas de agrimensura⁶. Este hecho evidencia que estos instrumentos no se consideraban, al menos en un contexto islámico, como instrumentos para el uso exclusivo de los astrónomos. No hay que perder de vista, pues, estos tratados de construcción y uso de instrumentos en principio astronómicos, ya que reflejan la forma en que se solucionaban algunos problemas de la vida cotidiana de la comunidad islámica medieval. Piénsese en la medición de tierras por motivo de compra, venta, reparto de herencias, o en la medición de alturas para el transporte de aguas, o en la determinación de la profundidad de pozos para saber cuál es la pendiente entre ellos para así transportar aguas mediante canales subterráneos o *qanāt*-s.

La existencia de los capítulos de cálculo trigonométrico en tratados árabes de instrumentos ha sido señalada y estudiada en más de una ocasión⁷. Vamos a ocuparnos en esta ocasión del uso del cuadrante de senos para cálculos trigonométricos de aplicación en agrimensura a través de un tratado árabe redactado en El Cairo a finales del siglo XIV.

6. En 1994 presentamos una comunicación en el "Colloque Des Traditions Cartographiques", celebrado en la *Vrije Universitat* de Bruselas. En ella abordamos esta cuestión de forma introductoria y general. El texto de esta comunicación se publicará próximamente en la revista belga *Ciel et Terre*.

7. Vid. E. Ausejo, "Sobre los conocimientos trigonométricos en los Libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio", *Llull*, 6 (1983), pp.5-36; R. Martí y M. Viladrich, "En torno a los tratados de uso del astrolabio hasta el siglo XIII en al-Andalus, la Marca Hispánica y Castilla", *Nuevos Estudios sobre Astronomía en el Siglo de Alfonso X*, Barcelona, 1983, pp. 49-62; M. Viladrich, *El "kitāb al-'amal bi-l-asturlāb"* (*Llibre de l'ús de l'astrolabi d'Ibn al-Samḥ*). *Estudi i Traducció*, Barcelona, 1986, pp. 82-90; R. Puig, *Los Tratados de Construcción y Uso de la Azafea de Azarquiel*, Madrid, 1987, pp. 33-38; e Ibn Bāso, *Risālat al-safīḥa al-ḡāmi'a li-ḡāmi' al-'urūd*. (*Tratado sobre la lámina general para todas las latitudes*). Edición crítica, traducción y estudio por E. Calvo Labarta, Madrid, 1993, pp.106-111.

2. *El cuadrante de senos. Denominación oriental y occidental. Orígenes. Descripción de su trazado y elementos que lo conforman. Curvas auxiliares. Funciones*

El cuadrante de senos es conocido según la tradición árabe con los nombres de *rub' al-muḡayyab*, *rub' al-ḡuyūb* o *rub' al-dastūr*. La tradición occidental lo denominó *quadrans canonis* o *quadrans vetustissimus*. Un instrumento similar, el *sexagenarium*, se conoció en Europa en la segunda mitad del siglo XV pero todo parece indicar que no tuvo una expansión como la que conoció el cuadrante de senos en el oriente musulmán⁸. El cuadrante de senos es un trazado que puede encontrarse inscrito en el dorso de diversos instrumentos como el astrolabio, la azafea de Azarquiel, el cuadrante astrolabio o nuevo, etc. Este trazado parece haberse inventado en el siglo IX y conoce un uso muy extendido durante prácticamente un milenio, siendo aún muy popular en el oriente islámico, al menos hasta el siglo pasado. El texto árabe más antiguo en el que se explica el uso del cuadrante de senos fue compuesto en el siglo IX por Abū Ŷa'far Muḡammad b. Mūsà al-Jwārizmī⁹. Se trata de un breve tratado que se encuentra a continuación de dos tratados de astrolabio del mismo autor conservados en una copia manuscrita en Berlín¹⁰.

El trazado del cuadrante de senos consta de una red de líneas verticales y horizontales que parten de los lados rectos del cuadrante. Estas líneas forman, generalmente, una red parecida a la trama de una hoja de papel milimetrado moderno y son paralelas una a una a los lados rectos del cuarto de círculo. Además de esta red, un cuarto de círculo va desde un extremo de una de las líneas rectas hasta el extremo de la otra. Ambas rectas son de la misma magnitud ya que son por definición radios del círculo origen. Las líneas que parten de las graduaciones del cuadrante determinan una escala gráfica de senos y cosenos. El cuadrante de senos, tal y como se describe

8. El Dr. González Marrero, Profesor de Lengua Latina de la Universidad de La Laguna, y yo estamos preparando una edición del tratado del *sexagenarium*, a partir de la colación de los textos latinos y valenciano que se conocen.

9. Ca. 800-847. Matemático y astrónomo que desarrolló su actividad científica en Bagdad. Véase F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifitums*, 9 vols., Leiden, 1967-1984 [=GAS], vol. V, pp.228-241.

10. Ms. Berlín, Deutsche Staatsbibliothek Landberg 56 (Ahlwardt 5791-5793), folios 96v.-97v., copiado en Egipto o Siria hacia 1500. Cf. D.A. King, "al-Khwārizmī and New Trends in Mathematical Astronomy in the Ninth Century", *Occasional Papers on the Near East*, 2 (1983), p.29.

en el tratado que hemos estudiado¹¹, consta de los siguientes elementos:

- dos escalas de 1 a 60 unidades y viceversa que van en los dos lados rectos del cuadrante. Una de ellas es la escala de los senos que en la aplicación astronómica del cuadrante representa la línea meridiana. La otra escala es la de los cosenos que en la aplicación astronómica del cuadrante representa la línea este-oeste,

- una escala de 1 a 90 unidades que va inscrita en el cuarto de circunferencia o limbo del cuadrante,

- una red de líneas rectas que relacionan una a una las unidades de las dos escalas rectas,

- un hilo lastrado o hilo del polo (*jayt al-šaqūl* o *jayt al-qutb*) que pende del punto de origen de las dos líneas rectas del cuadrante,

- un segundo hilo denominado libre (*al-jayt al-mutlaq*) que parte del extremo donde la línea meridiana del cuadrante y su limbo se cortan. Este hilo se utiliza únicamente para realizar cálculos en el cuadrante de senos y no para medir ángulos. No conozco otra fuente árabe en la que se haga mención a este segundo hilo auxiliar,

- dos pínulas situadas en una de las aristas del cuadrante y a través de las cuales el observador mirará el punto que le interese.

Además, nuestro tratado menciona la posibilidad de que se inscriban en el trazado del cuadrante de senos varias líneas curvas que aumentan la utilidad del aparato¹². Estas curvas son:

- una curva de radio 24 unidades que va de una de las líneas rectas del cuadrante hasta la otra, valor superior al de la oblicuidad de la eclíptica¹³, con la ayuda de la cual puede conocerse la declinación instantánea del sol,

- una curva axial trazada sobre la línea este-oeste que se utilizaba para la corrección del arco de mediodía y para conocer el acimut. Los senos definidos por esa curva se denominan senos curvos (*ŷuyūb munhaniya*),

- una curva para conocer la altura del sol en el momento de la oración de *‘aṣr* en cualquier latitud.

Nuestro texto añade que éstas son algunas de las curvas que se inscriben

11. *Vid. infra*, apartado 3.

12. *Cf.* fol.93v. y 94r. *Vid. infra*, apartado 3.

13. Nuestro texto menciona $\epsilon=23;35''$, que es el valor egipcio y sirio clásico.

en el trazado del cuadrante de senos y que pueden inscribirse otras¹⁴. Las curvas mencionadas aparecen corrientemente en el cuadrante de senos, como puede verse en la ilustración que hemos elegido como ejemplo (figura 1). En ella pueden verse otros elementos, como las líneas punteadas que parten de 12 unidades, que nuestro texto no menciona.

La función principal del cuadrante de senos es la de medir ángulos pero su genio reside en ofrecer la posibilidad de resolver gráficamente problemas de trigonometría plana y esférica, estos últimos por aproximación. Sirve además para realizar operaciones aritméticas sencillas como la multiplicación de un número por otro, la división de un número entre otro, la denominación de un número, y la multiplicación de un número por otro y división del resultado entre otro número. Así mismo, en el trazado del cuadrante de senos intervienen líneas rectas y no arcos de círculo, como ocurre con el cuadrante *šakkāzī*¹⁵. Como en el caso del cuadrante *šakkāzī*, el cuadrante de senos parece dar resultados no estrictamente exactos.

3. *El tratado de 'Izz al-Dīn b. Mas'ūd (siglo XIV) sobre las aplicaciones del cuadrante de senos. Título, datación y localización de la obra. Descripción de su contenido*

La *Risāla kāfiyat al-sayb fī-l-'amal bi-l-šayb* (o *Tratado de lo suficiente de la ventaja del uso del cuadrante de senos*) de 'Izz al-Dīn b. Mas'ūd¹⁶ está dedicada monográficamente a la explicación de las distintas aplicaciones del cuadrante de senos. Este tratado fue compuesto en El Cairo en el año 795/1393¹⁷ y de él parece haberse conservado sólo una copia manuscrita finalizada en 888/1483¹⁸, bien en el Magreb o bien por un copista

14. Cf. fol.94r.

15. Vid. J. Samsó, "Una hipótesis sobre cálculo por aproximación con el cuadrante *šakkāzī*", *Al-Andalus*, 36 (1971), pp.117-126.

16. Ms. árabe n° 918₁₄, folios 84v.-106r., de la Biblioteca del Real Monasterio de El Escorial. Vid. H. Derenbourg-H.P.J. Renaud, *Les manuscrits arabes de l'Escorial*, Paris, 1941, vol.II, p.24. La edición, traducción y estudio de este tratado fue presentado como tesis doctoral por la que escribe, trabajo que se encuentra inédito. Acerca del autor véase mi "En torno a 'Izz al-Dīn 'Abd al-'Azīz b. Mas'ūd (siglo XIV): vida y reseña de sus obras conocidas", en prensa en el *Boletín de la Asociación Española de Orientalistas*.

17. Cf. ms. 918₁₄, f.106r.

18. Cf. *ibidem*.

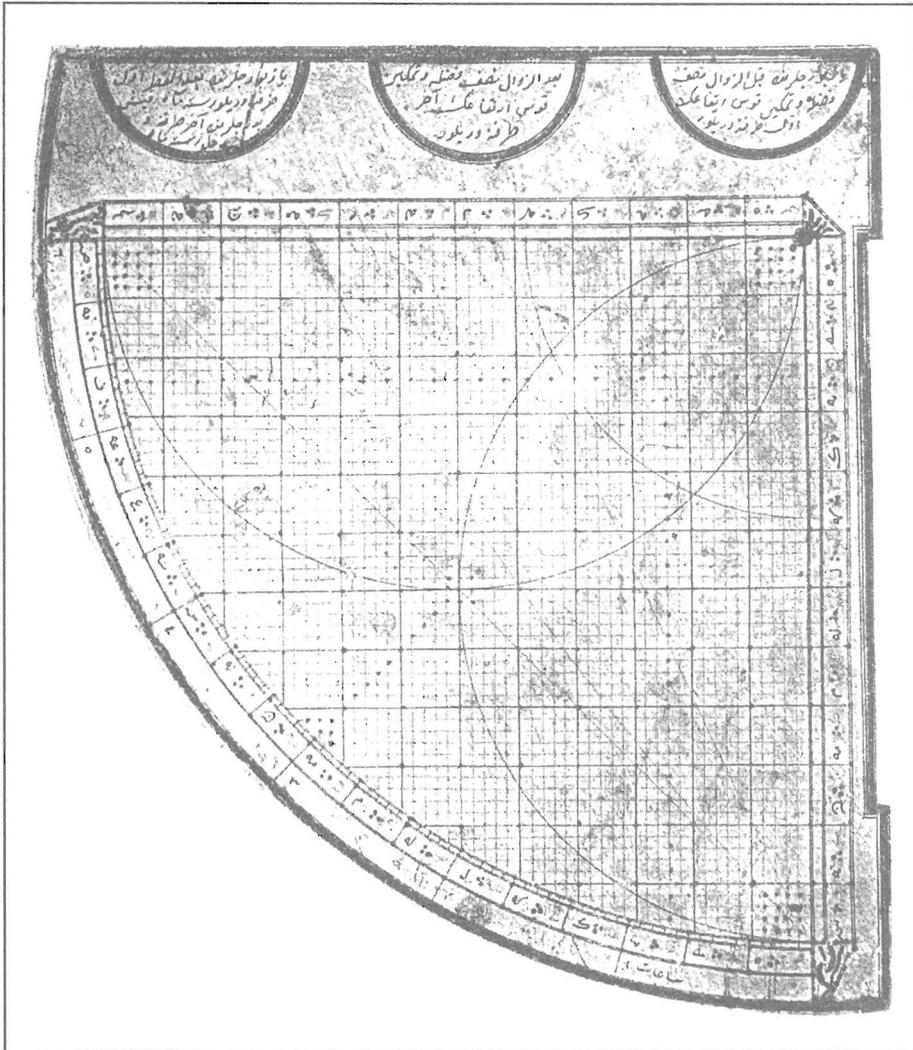


Figura 1: dorso de un cuadrante turco de finales del siglo XVIII, o comienzos del XIX, en el que se halla inscrito un cuadrante de senos. *Time Museum*, n^o 985¹⁹.

19. A.J. Turner, *The Time Museum*, Rockford, 1985, p.214.

magrebí. Esta copia se encuentra actualmente entre los fondos árabes de la Biblioteca de El Escorial (figura 2). El tratado consta de setenta y siete capítulos, repartidos en cuatro partes, más una introducción y un epílogo en el que se plantean veintiuna cuestiones prácticas que fueron tomadas del *Compendio de mīqāt* de al-Marrākušī²⁰. La inclusión de este epílogo de carácter práctico unido al hecho de que fuera la *risāla* el género en que el autor concibió su obra, delatan el carácter didáctico del tratado de Ibn Mas‘ūd. De los setenta y siete capítulos que componen la *risāla*, ocho capítulos se dedican a explicar cuestiones introductorias relativas a las distintas fracciones de tiempo, a los diferentes calendarios (árabe, rumí, copto, persa), a la determinación de la posición del sol con la ayuda de tablas o a la explicación de los distintos elementos teóricos que son comunes entre los astrónomos²¹. Un capítulo se dedica a la descripción del trazado del cuadrante de senos y sus elementos accesorios²², sin entrar en explicaciones sobre su fabricación. Y finalmente, sesenta y ocho capítulos se consagran a la manipulación del cuadrante de senos²³. De ellos, cincuenta y ocho se dedican a explicar los usos del cuadrante de senos en ‘ilm al-mīqāt (astronomía religiosa), siete capítulos a sus aplicaciones en ‘ilm al-misāha (agrimensura) y tres en ‘ilm al-ḥisāb (aritmética).

4. Las aplicaciones del cuadrante de senos en agrimensura. Advertencias previas: $r = 60$ y concepto de sombra. Estudio de los problemas propuestos por ‘Izz al-Dīn b. Mas‘ūd en su tratado

Las aplicaciones del cuadrante de senos en *misāha* se encuentran en la cuarta y última parte del tratado de Ibn Mas‘ūd y constituyen, al fin y al cabo, la resolución de los problemas de trigonometría más frecuentes en agrimensura. Se debe tener en cuenta que, durante la Edad Media, el cálculo trigonométrico estaba basado en un radio igual a 60. Por tanto al realizar las operaciones hay que multiplicar o dividir por 60. Por simplificación, podemos considerar $r=1$ y así evitar estar manejando 60 en

20. AL-Marrākušī, *Ŷāmi‘ al-mabādī‘ wa-l-gāyāt fī ‘ilm al-mīqāt*. Ms. 3343 Istanbul. Ed. facsímil del Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften. Frankfurt am Main, 1984. Algunos fragmentos de esta obra se encuentran editados y traducidos en J.-J. Sedillot, *Traité des instruments astronomiques des Arabes*, Paris, 1834 y 1835.

21. Capítulos 1 a 7 de la primera parte y capítulo 1 de la segunda.

22. Capítulo 2 de la segunda parte del tratado.

23. Capítulos 3 al 50 de la segunda parte y tercera y cuarta partes completas.

nuestras fórmulas.

Asimismo, durante la Edad Media se utilizaban las sombras en el cálculo trigonométrico. Las sombras en dicho cálculo eran la sombra extensa y la sombra conversa (*zill mabsūt* y *zill mankūs*) que corresponderían a nuestras cotangente y tangente modernas. En época medieval, la cotangente y la tangente de un ángulo venían definidas por la sombra proyectada por un gnomon perpendicular (para la cotangente, *sombra extensa*, *sombra directa* o *zill mabsūt*) o paralelo (para la tangente, *sombra conversa*, *sombra inversa* o *zill mankūs*) al suelo. Este gnomon generalmente tenía 12 dedos de largo y por ello la sombra extensa equivale a $12ctg\alpha$ y la sombra conversa a $12tg\alpha$.

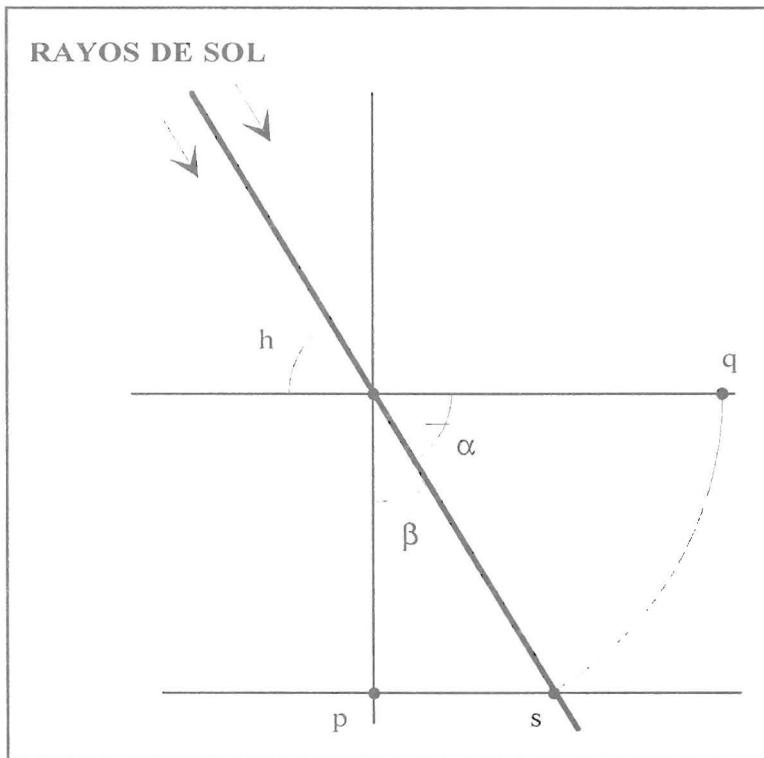


Figura 3: esquema de la función cotangente o sombra extensa ($ctg\alpha$), donde OP es un gnomon perpendicular al suelo y PS la sombra extensa para una altura del sol $\alpha = QS$.

Esto es, $ctg\alpha = ctg h = tg\beta = PS/OP = PS/12$.

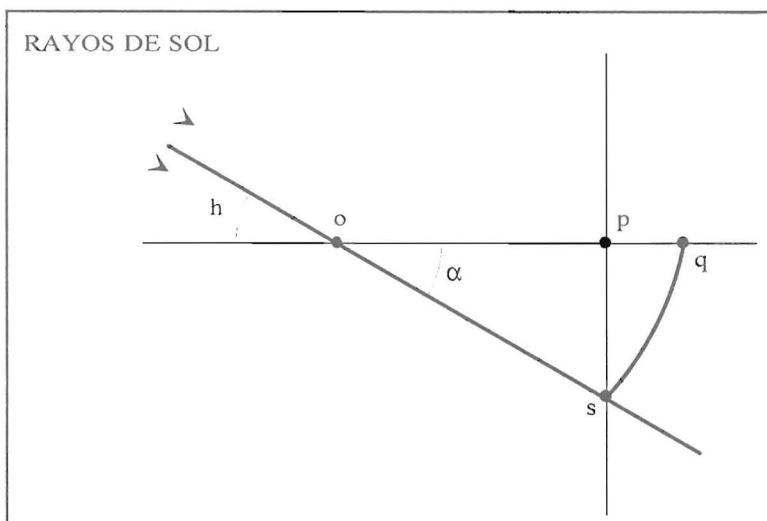


Figura 4: esquema de la función tangente o sombra conversa ($tg\alpha$), donde OP es un gnomon paralelo al suelo y PS la sombra conversa para una altura del sol $\alpha = QS$. Esto es, $tg\alpha = tg h = PS/OP = PS/12$

Las aplicaciones en agrimensura que recoge el tratado de Ibn Mas'ūd pueden clasificarse en dos grupos²⁴ y son las siguientes:

1. cálculo de alturas y profundidades (1, 2, 3 y 4)²⁵,
 - 1.1 determinación de la altura de cualquier objeto desde su base (1),
 - 1.2 determinación de la altura de cualquier objeto de base inaccesible (2),
 - 1.3 determinación de la altura de dos objetos de altura diferente (4),
 - 1.4 determinación de la profundidad de cualquier cavidad (3),
2. cálculo de anchuras y distancias (5 y 7),
 - 2.1 determinación de la anchura de cualquier depósito de agua (5),

24. La clasificación que sigue es mía.

25. Las cifras arábicas entre paréntesis indican, de aquí en adelante, el número del capítulo en que se encuentra cada aplicación en la cuarta parte del tratado de Ibn Mas'ūd.

2.2 determinación del punto medio existente entre dos elevaciones de altura diferente (7).

Veamos detalladamente los métodos que Ibn Mas'ūd propone para resolver cada uno de estos problemas.

1. Cálculo de alturas y profundidades:

Ibn Mas'ūd explica el uso del cuadrante de senos para el cálculo de alturas abordando tres supuestos:

- 1.1 determinación de la altura de un objeto desde su base (1),
- 1.2 determinación de la altura de un objeto de base inaccesible (2),
- 1.3 determinación de la altura de dos objetos de altura diferente (4).

En el caso 1.1 (véase *fig.5*)²⁶, la altura del objeto se toma con el instrumento sin que el observador deba desplazarse (1). Con el cuadrante de senos la altura se toma dejando que el hilo lastrado penda del instrumento, que debe estar perpendicular al suelo y presentando las pínulas de forma que el observador mire por ellas, y dirigiéndolo hacia el punto cuya altura queremos conocer. De esta forma leemos directamente, en el limbo del instrumento, el ángulo que hay entre la cima del objeto y el observador. Una vez conocido el ángulo, al que llamaremos α , calculamos con la ayuda del instrumento la sombra extensa²⁷. Nótese que la sombra extensa no corresponde exactamente a la cotangente de α ($ctg\alpha$), a la que

26. Esta figura, así como las que incluimos hasta el final de este trabajo, es elemental y no tiene nada de original. Son esquemas que ya han aparecido en otros trabajos, desde los pioneros de Millás Vallicrosa hasta los que han seguido su magisterio, como los de R. Martí, M. Viladrich, R. Puig o E. Calvo, todos ellos citados en estas páginas.

27. Para averiguar la sombra extensa, que podemos hacer equivaler a nuestro concepto moderno de $ctg\alpha$, tenemos que manipular de una forma determinada el cuadrante de senos. Para conocer la cotangente de un ángulo dado mediante el cuadrante de senos primero debemos averiguar $\sin\alpha$. El seno de un ángulo se obtiene de forma automática -con el cuadrante de senos leyendo las unidades que determina el hilo sobre la escala correspondiente. Entramos en sentido inverso, es decir, en sentido ascendente, de la línea meridiana a la línea este-oeste, en la escala de los senos con $\sin\alpha$ y también en la escala de los cosenos con el valor 12. Colocaremos el hilo del cuadrante en el punto en que $\sin\alpha$ y 12 se cortan. Luego entramos también a la inversa en la escala de los senos con el coseno de la altura. El punto en que intersectan el hilo y $\cos\alpha$ nos da $ctg\alpha$. Este cálculo lo expone Ibn Mas'ūd en el capítulo 8 de la segunda parte del tratado.

es generalmente proporcional. La constante de proporcionalidad suele tomar el valor 12. Este valor, y otros generalmente asociados en la literatura al sistema de unidades utilizado para medir (pies, codos, dedos, etc.), no interviene en la obtención de una unidad u otra en el resultado, puesto que, tal y como se puede ver en la fórmula, lo que interviene para la medida es el cociente entre la sombra extensa y el factor de proporcionalidad usado para su cálculo, siendo el cociente un número sin dimensiones.

La siguiente es la fórmula para calcular la altura del objeto, donde h es dicha altura, d la distancia entre el observador y el objeto, y h' la altura del observador,

$$h = \frac{l}{\text{ctg}\alpha} d + h'$$

Ibn Mas'ūd da un segundo método para resolver este problema. Éste consiste en poner el hilo del cuadrante o la alidada sobre 45° , es decir sobre la diagonal del instrumento, y aproximarse hasta que la distancia que haya entre el observador y el objeto sea equivalente a la altura del objeto. Para conocer la altura total del objeto basta sumarle la estatura del observador -desde su ojo hasta el suelo- a la distancia que hay entre él y el objeto²⁸.

Un tercer método propuesto por Ibn Mas'ūd consiste en averiguar $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$. Introducir $\cos\alpha$ a la inversa²⁹ en la escala de los senos y la distancia que hay entre el observador y la base del objeto en la escala de los cosenos. Colocar el hilo del cuadrante en el punto en que ambos se cortan. Luego introducir $\sin\alpha$ a la inversa también en la escala de los senos y mirar el coseno que pasa por el punto de intersección entre él y el hilo del cuadrante. De esta forma, sumándole la altura del observador, se obtiene la

28. Este procedimiento aparece en el tratado de astrolabio de Ibn al-Saffār, si bien hay que tener en cuenta que no usa el cuadrante de senos en la resolución de este problema. Cf. J.M. Millàs Vallicrosa, *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval*, Barcelona, 1983 (1ª ed. = 1931), p.67-68. J.M. Millàs Vallicrosa, "Los primeros tratados de astrolabio en la España árabe", *Revista del Instituto de Estudios Islámicos de Madrid*, 3 (1955), p.71-73 (texto árabe). Véase también el primer caso que se explica en el capítulo 157 del tratado de Ibn Bāso estudiado por E. Calvo y citado anteriormente, donde se utiliza el cuadrante de sombras del dorso de la lámina universal que describe el tratado.

29. Es decir, contando desde la línea meridiana hacia la línea este-oeste del cuadrante. *Vid. supra*.

altura del objeto³⁰.

En una nota marginal se explica la resolución aritmética de este problema³¹.

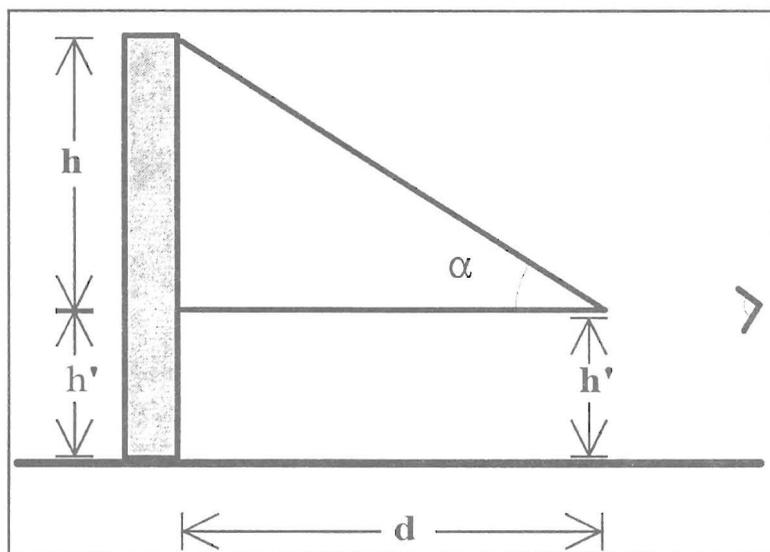


Figura 5

En el caso 1.2 (véase *fig. 6*), el problema es conocer la altura de un objeto cuya base nos es inaccesible (2). Ibn Mas'ūd lo plantea de forma que primero se halla la distancia entre el observador y la elevación cuya altura queremos averiguar, para luego determinar su altura. Para ello el observador debe realizar dos mediciones de dos distancias (d y d') haciendo la correspondiente marca en el suelo en cada una de ellas. En este caso el autor precisa que se debe avanzar en línea recta desde el lugar donde se ha hecho la primera marca hasta una nueva posición en la que vea el punto más alto de la elevación. En ese lugar deberá volver a medir la altura y hará una segunda marca. En el momento de hacer la primera marca hemos calculado la sombra extensa. Al hacer la segunda marca, y por tanto la segunda medición, debemos introducir esa sombra en la escala de los cosenos y

30. Este método es prácticamente el mismo que el primero.

31. Cf. fol.103r.

contar 12 a la inversa en la escala de los senos. Señalar con el hilo del cuadrante el punto en que ambos valores se cortan y ver qué cantidad hay entre los dos puntos de intersección que hemos marcado con el hilo del cuadrante. Contando ese valor a la inversa en la escala de los senos y restando la estatura del observador, obtenemos la altura de la elevación. En este caso se especifica literalmente que cualquier decimal debe despreciarse para obtener un resultado sin fracción.

Esto quiere decir que para determinar la altura de un objeto cuya base no podemos ver, se deben calcular las siguientes relaciones,

$$\frac{d}{h} = \frac{ctg\alpha}{1} \quad \frac{d'}{h} = \frac{ctg\alpha'}{1}$$

También deberá calcularse la diferencia entre las dos distancias medidas, $d' - d$, divididas por h . Sumándole la altura del observador (h') al resultado se obtiene la altura que se buscaba.

El método para determinar la distancia entre el lugar dónde se encuentra el observador y la elevación cuya altura se quiere averiguar es expuesto por Ibn Mas'ūd en un apartado al final del capítulo que venimos comentando³². Se debe tomar el ángulo de altura de la elevación, hallar su cotangente y memorizarla. Restar la estatura del observador a $ctg\alpha$, que es la altura de la elevación de hecho, y guardar el resto. Introducir a la inversa en la escala de los senos 12 y en la de los cosenos $ctg\alpha$, que es la cotangente memorizada antes. Luego colocar el hilo del cuadrante en el punto en que ambos valores intersectan. Introducir el resto que habíamos guardado antes, osea la altura de la elevación, y mirar el coseno que pasa por el punto en el que se cortan la altura y el hilo del cuadrante. Con ello se determina la distancia.

Estos dos métodos se basan en la capacidad del cuadrante de senos para efectuar divisiones.

32. Capítulo 2 de la cuarta parte.

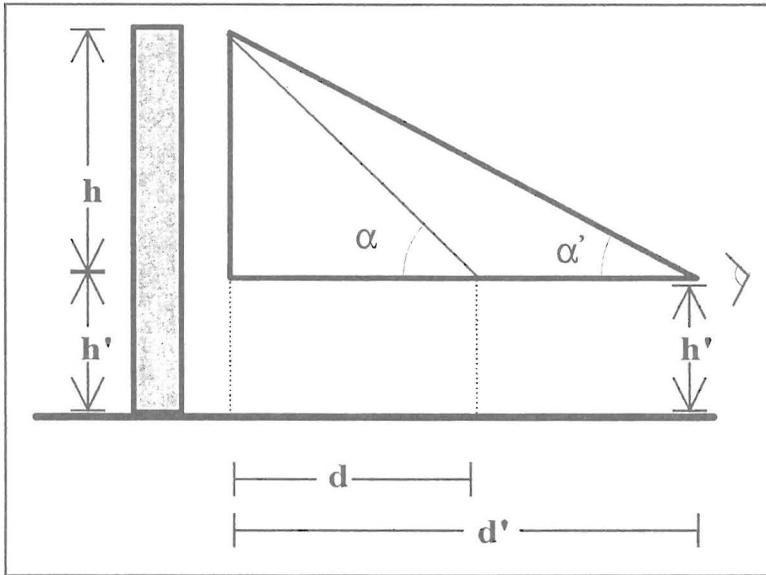


Figura 6

En el caso 1.3, el problema es averiguar la altura de dos objetos de altura diferente (4). Es una combinación de cálculo de alturas y distancias que se destina a hacer posible el transporte de aguas. El método para determinar esto se sirve de nuevo de la realización de dos mediciones y de sus dos marcas correspondientes pero esta vez con la intervención de dos palos más altos que el observador en los que se hacen las marcas. Al medir la distancia que hay entre dos lugares y la altura a la que está el lugar en el que está el agua respecto al lugar donde queremos hacerla llegar, y dividiendo la diferencia entre ambas alturas entre la distancia que hay entre ellas, averiguaremos la pendiente que hay entre ambas alturas, dato que debe conocerse si se quiere transportar aguas. La pendiente que se haya entre los dos lugares vendrá determinada por la proporción,

$$\frac{h - h'}{d}$$

En este capítulo Ibn Mas'ūd recoge la autoridad de Ibn al-Şaffār³³ para afirmar que la pendiente deberá ser de diez codos o más ya que la pendiente mínima es de un codo por cada cien codos de distancia, lo que quiere decir que la pendiente mínima para transportar aguas deberá ser de un 1%. Esta pendiente es, al parecer, algo pronunciada si seguimos a Martí y Viladrich, que citan a su vez a Goblot³⁴, que indican que dicho transporte puede realizarse hasta con una pendiente de un 1‰³⁵. Efectivamente, con una pendiente de un 1% el agua descendería con mucha rapidez, y por tanto a gran presión, lo que supondría un problema de ingeniería cuya solución estaría supeditada al conocimiento y manipulación de materiales que durante la Edad Media no se conocían.

En el caso 1.4 (véase *fig.7*), el problema es la medición de profundidades (3). Primero se debe determinar la anchura de la boca del pozo. Luego se mira hacia el fondo del pozo en dirección al extremo opuesto al lugar donde el observador está de pie. En esa posición, se miran los grados de altura que marca el limbo del instrumento. Se memoriza el seno y el coseno de ese ángulo o su sombra extensa ($ctg\alpha$). Se toma ahora la anchura del pozo y se introduce a la inversa en la escala de los senos. Del mismo modo, se introduce la sombra extensa en la escala de los cosenos. Se colocará el hilo del cuadrante en el punto en que ambos valores se corten. Se introducirá en la escala de los cosenos el valor 12. Sabremos la profundidad del pozo o similar leyendo a la inversa en la escala de los senos el valor que pasa por el punto en que cortan 12 y el hilo.

La fórmula que se está aplicando es la siguiente:

$$p = \frac{I}{ctg\alpha} \quad a = \frac{a}{ctg\alpha}$$

33. Abū-I-Qāsim Aḥmad b. 'Abd Allāh b. 'Umar b. al-Şaffār, matemático y astrónomo andalusí que desarrolló su actividad en Córdoba (m. ca. 426/1035). *Vid. GAS*, vol.V, pp.356-357 y vol.VI, pp.250-251. Un capítulo dedicado a este mismo problema se encuentra en el tratado de astrolabio de este autor, *vid. J.M. Millas Vallicrosa, Assaig...*, pp.68-69. Véase también el capítulo 158 del tratado de la lámina universal de Ibn Bāšo que venimos citando, donde se trata el mismo problema. En ambos casos el problema se resuelve con la ayuda de un cuadrante de sombras y no de senos.

34. E. Goblot, *Les Qanāts, une technique d'acquisition de l'eau*, Paris, 1979. También M.A. Butler, "Irrigation in Persia by Kanāts", *Civil Engineering* 3 (2) (1933), pp.68-73, trabajo que cito tomando la referencia de Martí-Viladrich y que no me ha sido posible consultar.

35. *Vid. R. Martí, M. Viladrich, "En torno a los tratados de uso del astrolabio hasta el siglo XIII en al-Andalus, la Marca Hispánica y Castilla", Nuevos Estudios sobre Astronomía en el Siglo de Alfonso X*, Barcelona, 1983, p.58.

donde a es la anchura de la boca del pozo y p es la profundidad.

Para calcular la anchura del pozo partiendo del seno y del coseno del ángulo medido, introduciendo el mayor de ellos en la escala de los senos y el menor en la de los cosenos. Manipulando el cuadrante de senos obtendremos la sombra extensa o $ctg\alpha$.

En el tratado de Ibn Mas'ūd aparece en nota marginal la explicación aritmética de este cálculo³⁶.

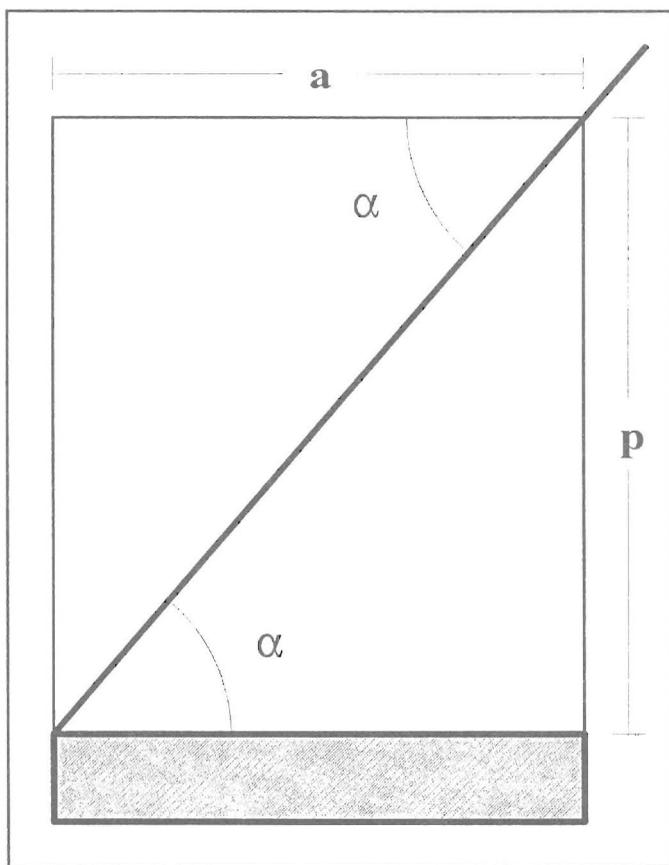


Figura 7: el ángulo que el observador mide es el ángulo complementario de α

36. Cf. fol.103v.

2. Cálculo de anchuras y distancias:

En este apartado hemos agrupado el cálculo de anchuras y de distancias, ya que se trata prácticamente del mismo problema. Ibn Mas'ūd resuelve dos casos:

- 2.1 determinación de la anchura de cualquier depósito de agua (5),
- 2.2 determinación del punto medio existente entre dos elevaciones de altura diferente (7).

En el caso 2.1 (véase *fig.8*), el problema es determinar la anchura de una alberca, un río o similar (5). Ibn Mas'ūd resuelve dos supuestos.

El primero de ellos corresponde al caso en que el observador pueda situarse en la orilla del río o similar. Desde la orilla mirará por las pínulas del instrumento hasta ver la otra orilla. El hilo del cuadrante, o la alidada, marcará un ángulo α del cual hallaremos su cotangente. Introduciremos $ctg\alpha$ a la inversa en la escala de los senos y a la vez el valor 12 en la escala de los cosenos. Pondremos el hilo del cuadrante en el punto en que ambos se cortan. A continuación se introduce la estatura del observador en la escala de los cosenos y se mira el valor que pasa por el punto de intersección entre ella y el hilo, contando a la inversa en la escala de los senos. Esto nos dará la anchura que se buscaba. Es decir,

$$a = ctg\alpha \cdot h$$

donde a es la anchura del río, alberca o similar y h la altura del observador, desde su ojo hasta el suelo. El tratado contiene una nota marginal que recoge una corrección del autor explicando la fórmula que se está aplicando en este supuesto³⁷. Esa fórmula corresponde a la última que hemos indicado.

El segundo supuesto se refiere al caso en que no podamos o no queramos acercarnos a la orilla para efectuar la medición de la anchura del accidente de terreno que nos interesa (véase *fig.9*). En ese caso se deberán tomar dos medidas. Una primera medición se lleva a cabo para averiguar la distancia entre el lugar donde se encuentra el observador y la orilla más próxima. En este primer momento Ibn Mas'ūd indica que hay que hacer una

37. Cf. fol.103v.

marca en el suelo entre los pies del observador. A continuación hay que colocar el hilo sobre la misma altura angular que marcaba en el momento de efectuar la primera medición y mirar hacia la otra orilla hasta que coincida el punto que estamos viendo con la altura que marca el hilo del cuadrante. En ese punto se hará una segunda marca. La diferencia entre las dos marcas nos dará la anchura que buscábamos.

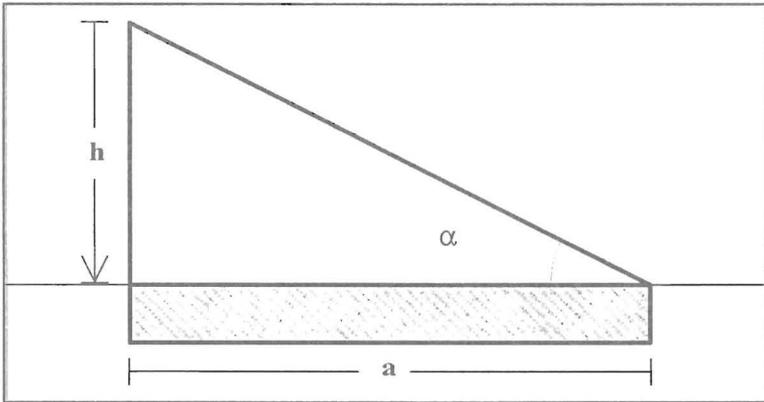


Figura 8

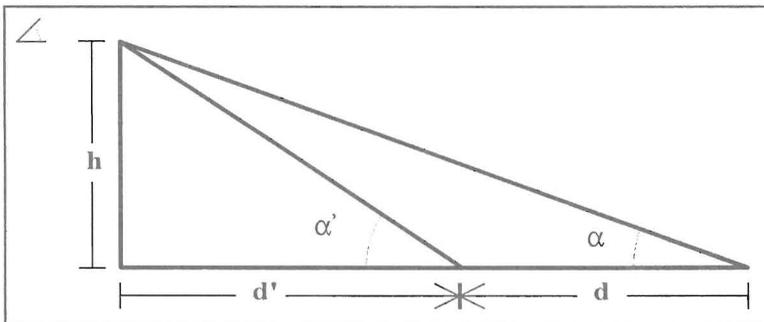


Figura 9

En el caso 2.2, el problema es determinar el punto medio existente entre dos elevaciones de altura diferente (7). Lo primero es tomar el ángulo de altura de cada una de las elevaciones y la distancia que hay entre ellas. La diferencia de altura que haya entre las dos elevaciones se introduce a la inversa en la escala de los senos y la distancia que hay entre ambas, en la

escala de los cosenos. Colocaremos el hilo del cuadrante sobre el punto de intersección de esos dos valores. Después introducimos el valor 1 en la escala de los cosenos y miraremos el seno que pasa por el punto de intersección entre él y el hilo del cuadrante, contando a la inversa. Hasta aquí, hemos efectuado una división gráficamente mediante el cuadrante de senos que nos da como resultado $ctg\alpha$. Obtendremos la solución del problema si restamos al resultado de esa división la distancia que hay entre las dos elevaciones y tomamos a continuación la mitad del resto.

5. Conclusiones

Entre los problemas que pueden resolverse mediante el uso del cuadrante de senos se encuentran la medición de alturas, profundidades, anchuras y distancias. Estos problemas están en relación con el *'ilm al-misāha* o agrimensura.

Generalmente suelen aparecer capítulos relativos a la resolución de estos problemas en tratados de uso de distintos instrumentos de origen islámico. Normalmente estos capítulos aparecen al final del tratado en cuestión y guardan similitudes evidentes entre sí, como el enunciado de los capítulos y su distribución.

El tratado de Ibn Mas'ūd no presenta ninguna originalidad en estos capítulos dedicados a problemas de agrimensura que acabamos de comentar, respecto a otros tratados en los que aparecen también capítulos de este tipo. Nos referimos, en la tradición andalusí, al tratado de la azafea de Azarquiel, donde se incluyen algunos capítulos dedicados al uso del cuadrante de senos incorporado al dorso de la azafea³⁸. Hay que matizar que en la tradición andalusí relativa al astrolabio de autores coetáneos a Azarquiel, como Maslama al-Ma'yrūtī (m. ca. 1007) y sus discípulos Ibn al-Šaffār (m. 1035) e Ibn al-Samḥ (m. 1035), no hay mención alguna al cuadrante de senos³⁹. No tenemos noticia, tampoco, de ningún tratado andalusí exclusivamente dedicado al uso del cuadrante de senos. Lo que sí hemos podido constatar

38. El tratado de la azafea de Azarquiel (siglo XI) da testimonio por primera vez de la incorporación del cuadrante de senos al dorso de un instrumento andalusí. Véase un estudio de los capítulos dedicados al cuadrante de senos en este tratado en R. Puig, "Una aportación andalusí a la difusión del cuadrante de senos", *Yād-Nāma in memoria di Alessandro Bausani*, Roma, 1991, II, pp.75-85.

39. Cf. R. Puig, art.cit., p.80.

es que el tratado de Ibn Mas'ūd cita explícitamente a Ibn al-Şaffār⁴⁰, lo que constituye una prueba de la pervivencia del tratado de astrolabio de este astrónomo andalusí del siglo XI en el oriente islámico en el siglo XIV. En la tradición oriental, la escasez de fuentes editadas y/o publicadas⁴¹ nos impiden tener, por el momento, una visión coherente que nos permita establecer parentescos entre los distintos tratados de uso del cuadrante de senos⁴².

En el caso particular de los tratados monográficos dedicados al uso del cuadrante de senos, se incluyen estos capítulos independientemente de dónde esté inscrito (dorso del astrolabio, de la azafea, del cuadrante...). Estos tratados conocen un proceso desde su primera aparición como parte constituyente de tratados de astrolabio⁴³ hasta convertirse en tratados independientes y monográficos. Estos tratados dedicados exclusivamente a los usos del cuadrante de senos proceden del oriente islámico donde, como ya comentábamos al comienzo de estas páginas, el cuadrante de senos alcanza una fama y expansión notable.

Se deberá, tras un estudio profundo del abundante material manuscrito, separar y clasificar los *capítulos* dedicados al cuadrante de senos en los diversos tratados de instrumentación astronómica de los *tratados* que se ocupan exclusivamente del cuadrante de senos. Será posible así comprender cómo se ha llevado a cabo el desarrollo y la transmisión del conocimiento en lo que concierne al cuadrante de senos, cuales son las fuentes de las que provienen esos capítulos de aplicaciones a la agrimensura y, con ello, estudiar una de las parcelas que integran el *'ilm al-misāḥa*, *i.e.* la tecnología aplicada a la medición agronómica.

40. Capítulo 4 de la cuarta parte.

41. Sólo hay dos tratados de uso del cuadrante de senos estudiados, uno es el de Sibṭ al-Māridīnī (activo *ca.* 1460-m.*ca.* 1494), cuya introducción, y sólo la introducción, fue traducida y estudiada por Worrell y Rufus ("Maridini's introduction to the use of the quadrant", *Scripta Mathematica*, 10 (1944), pp.170-180). El segundo tratado es el de 'Izz al-Dīn b.Mas'ūd, al que hemos hecho referencia a lo largo de este trabajo. En estos momentos estoy trabajando en la edición de un tratado acerca del uso del cuadrante de senos de 'Izz al-Dīn al-Wafā'ī, *muwaqqit* activo *ca.* 1450.

42. En mi tesis doctoral incluí una lista de tratados árabes acerca del cuadrante de senos de época mameluca que recoge nueve tratados de nueve autores diferentes que van desde comienzos del siglo XIV hasta principios del siglo XVI. Todos ellos permanecen inéditos.

43. El tratado de astrolabio de al-Jwārizmī (siglo IX), conservado en Berlín y que ya hemos citado, el *Kitāb fī isti'āb al-wuḡūh al-mumkina fī ṣan'at al-ašturlāb* de al-Bīrūnī (siglo XI) y el tratado de la azafea de Azarquiel, que mencionan al cuadrante de senos por estar inscrito en el dorso de estos instrumentos.